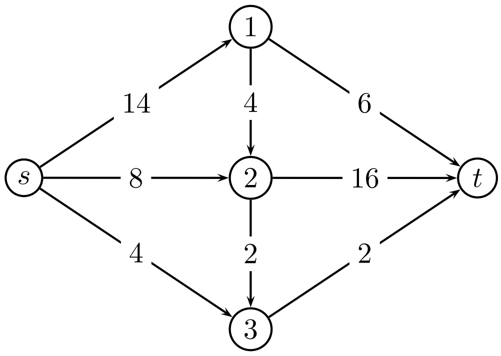
Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

23. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt im folgenden Graphen. Die Zahlen auf den Kanten geben dabei die maximale Kapazität an. Starten Sie den Algorithmus mit dem folgenden Fluss:

Kante	s-1	s-2	s-3	1-2	2-3	1-t	2-t	3-t
Fluss	8	8	0	2	2	6	8	2

Geben Sie den optimalen Flusswert explizit an!



24. Die Mitglieder des Sparvereins "Pfennigfuchser" veranstalten eine Weihnachtsfeier im Lokal "Zur Wildgans". Um das gegenseitige Kennenlernen zu fördern, wird beschlossen, dass keine zwei Personen aus derselben Familie an einem Tisch Platz nehmen sollen. Im Sparverein sind Personen aus p Familien vertreten, und zwar a_i Personen aus Familie i, $i = 1, \ldots, p$. Gesucht ist nun eine Sitzverteilung, die die Sparrunde unter Berücksichtigung der obigen Einschränkungen aud die q Tische des Lokals aufteilt, wenn auf Tisch j, $j = 1, \ldots, q$, b_j Personen Platz finden. Formulieren Sie dieses Problem als Flussproblem auf einem geeignet definierten Netzwerk.

25. Sei $N = (G, c, l, s, t)$ ein Netzwerk mit Quelle s, Senke t und oberen und unteren Kantenkapazitäten $c(i,j)$ bzw. $l(i,j)$. Gesucht ist ein Fluss $f(i,j)$, der die Flusserhaltungsgleichungen und $0 \leq l(i,j) \leq f(i,j) \leq c(i,j)$ erfüllt.

   (a) Zeigen Sie, dass dieses Problem auf ein gewöhnliches maximales Flussproblem transformiert werden kann.

   (b) Finden Sie mit der angegebenen Methode einen zulässigen Fluss für das Netzwerk mit unteren und oberen Kantenkapazitäten in Abbildung 6.

   (c) Geben Sie ein Verfahren an, das ausgehend von einem zulässigen Fluss, einen maximalen Fluss für das modifizierte Problem findet.

   (d) Testen Sie diesen Algorithmus am gleichen Netzwerk und starten Sie mit der Ausgangslösung $f(s,2) = 3$, $f(3,s) = 1$, $f(2,3) = 1$, $f(3,2) = 4$, $f(2,4) = 6$, $f(4,3) = 5$, $f(3,t) = 1$, $f(4,t) = 1$.

   (e) Verallgemeinern Sie den Satz von Ford und Fulkerson auf Netzwerke mit oberen und unteren Kantenkapazitäten.

26. Wir betrachten eine Sportliga mit n Teams in der im Laufe einer Spielzeit jeder gegen jeden spielt (eventuell auch öfters). Weiters nehmen wir an, dass es für die siegreiche Mannschaft eines Spiels einen Punkt gibt und keine Unentschieden existieren (z.B. Amerikanische Baseballleague). Zu einem gewissen Zeitpunkt der Saison hat Team j p_j Punkte erreicht ($j = 1, \ldots, n$). Die noch ausstehenden Spiele sind als Multimenge $G = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots\}$ mit $u_i, v_i \in \{1, \ldots, n\}$ und $u_i \neq v_i$ gegeben. Wie kann man feststellen, ob die Spiele so ausgehen können, dass Team 1 am Ende der Saison mindestens so viele Punkte hat wie jedes andere Team?

27. Sei $G = (V, E)$ ein kreisfreier gerichteter Graph und $E' \subset E$. Eine Menge M von Wegen in G überdeckt E', wenn jede Kante aus E' auf mindestens einem Weg in M liegt. Zeigen Sie: Die minimale Anzahl an Wegen in G, die E' überdeckt, ist gleich der maximalen Anzahl von Kanten aus E', von denen keine zwei zu einem Weg in G gehören.

28. Modellieren Sie folgende Problemstellung als minimales Schnittproblem auf einem geeignet definierten Netzwerk: Gegeben ist die Menge $G = \{1, \ldots, n\}$ von Gegenständen, sowie Teilmengen $S_i \subseteq G$, $i = 1, \ldots, m$. Jedem Gegenstand j ist ein Preis $c_j > 0$ und jeder Menge S_i ein Profit $b_i > 0$ zugeordnet, der allerdings nur dann erlangt wird, wenn alle Gegenstände aus S_i verfügbar sind. Gesucht ist eine Teilmenge $G' \subset G$ von Gegenständen, sodass der erzielte Gewinn (= Profit - Kosten) möglichst groß wird.

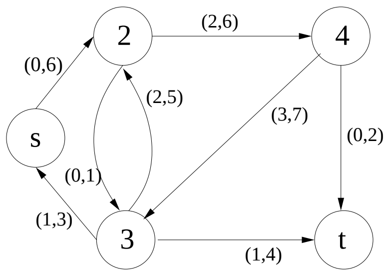


Abbildung 6: untere Kapazitätsschranken