Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

12. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Probleme aus der Vorlesung äquivalent sind: Maximum-Weight-Branching-Problem, Minimum-Weight-Arborescence-Problem, Minimum-Weight-Rooted-Arborescence-Problem.

13. Finden Sie für den Graphen in Abbildung 2 ein maximales Branching.

14. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Gewichten $c : E \to \mathbb{R}$, seien s und t zwei Knoten und $k \in \mathbb{N}$. Sei P ein kürzester Weg unter allen s-t-Wegen mit höchstens k Kanten und sei $e = (u, t)$ die letzte Kante von P. Zeigen Sie, dass dann $P - e$ ein kürzester Weg unter allen s-u-Wegen mit höchstens $k - 1$ Kanten ist.

15. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 3 den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.

16. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 3 ohne Berücksichtigung der Kantenorientierung den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.

17. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das folgende Problem löst:
Finden Sie für einen gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$ einen Algorithmus, der den $s - t$-Weg bestimmt, für den die längste Kante so kurz als möglich wird.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Dijkstra.

18. Bestimmen Sie mit dem Moore-Bellman-Ford Algorithmus den kürzesten Weg von s zu allen Knoten im Netzwerk 4.
Was passiert, wenn Sie die Länge der Kante $(2, 3)$ auf 4 setzen? Testen Sie den Algorithmus auch für diesen Fall!

19. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten und $s, t \in V$.

    (a) Formulieren Sie das Problem des kürzesten $s - t$-Weges als lineares Programm mit binären Variablen.

    (b) Zeigen Sie, dass die Restriktionenmatrix vollständig unimodular ist.

    (c) Stellen Sie das duale Problem auf und zeigen Sie, dass die Länge des kürzesten $s - t$-Weges gleich dem Maximum von $\pi(t) - \pi(s)$ ist, wobei π ein zulässiges Knotenpotential ist.

20. Berechnen Sie die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren und deren Länge für den Graphen in Abbildung 5.

21. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den kürzesten gerichteten Kreis in G bestimmt.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Floyd und Warshall.

22. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit konservativen Gewichten $c : E \to \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$. Angenommen es gibt nur einen kürzesten s-t Weg P. Wie können Sie dann in polynomieller Zeit den kürzesten s-t Weg abgesehen von P finden?

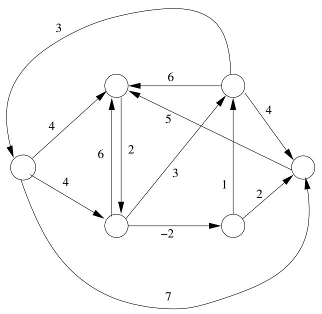

Abbildung 2: Beispiel 13

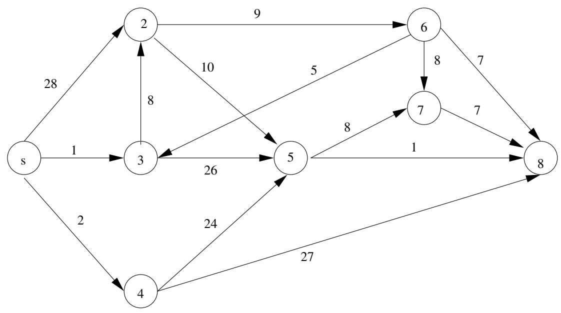

Abbildung 3: Beispiel 15, 16

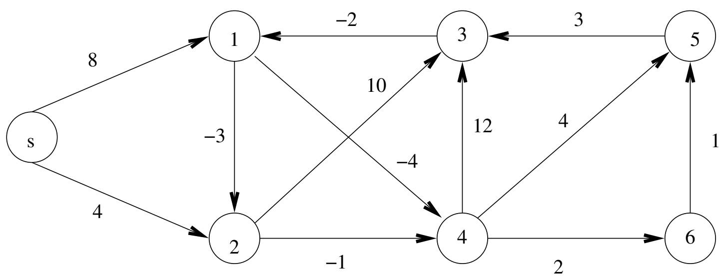

Abbildung 4: Beispiel 18

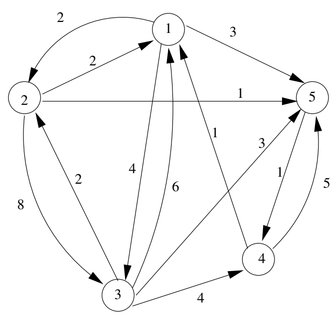

Abbildung 5: Beispiel 20