

Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

12. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Probleme aus der Vorlesung äquivalent sind: Maximum-Weight-Branching-Problem, Minimum-Weight-Arborescence-Problem, Minimum-Weight-Rooted-Arborescence-Problem.
13. Finden Sie für den Graphen in Abbildung 2 ein maximales Branching.
14. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Gewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, seien s und t zwei Knoten und $k \in \mathbb{N}$. Sei P ein kürzester Weg unter allen s - t -Wegen mit höchstens k Kanten und sei $e = (u, t)$ die letzte Kante von P . Zeigen Sie, dass dann $P - e$ ein kürzester Weg unter allen s - u -Wegen mit höchstens $k - 1$ Kanten ist.
15. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 3 den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.
16. Berechnen Sie für den Graphen in Abbildung 3 ohne Berücksichtigung der Kantenorientierung den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten.
17. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das folgende Problem löst:
Finden Sie für einen gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$ einen Algorithmus, der den $s - t$ -Weg bestimmt, für den die längste Kante so kurz als möglich wird.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Dijkstra.
18. Bestimmen Sie mit dem Moore-Bellman-Ford Algorithmus den kürzesten Weg von s zu allen Knoten im Netzwerk 4.
Was passiert, wenn Sie die Länge der Kante $(2, 3)$ auf 4 setzen? Testen Sie den Algorithmus auch für diesen Fall!
19. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten und $s, t \in V$.
 - (a) Formulieren Sie das Problem des kürzesten $s - t$ -Weges als lineares Programm mit binären Variablen.
 - (b) Zeigen Sie, dass die Restriktionenmatrix vollständig unimodular ist.
 - (c) Stellen Sie das duale Problem auf und zeigen Sie, dass die Länge des kürzesten $s - t$ -Weges gleich dem Maximum von $\pi(t) - \pi(s)$ ist, wobei π ein zulässiges Knotenpotential ist.
20. Berechnen Sie die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren und deren Länge für den Graphen in Abbildung 5.
21. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit konservativen Kantengewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den kürzesten gerichteten Kreis in G bestimmt.
Hinweis: Modifizieren Sie den Algorithmus von Floyd und Warshall.
22. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit konservativen Gewichten $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ und zwei Knoten $s, t \in V$. Angenommen es gibt nur einen kürzesten s - t Weg P . Wie können Sie dann in polynomieller Zeit den kürzesten s - t Weg abgesehen von P finden?

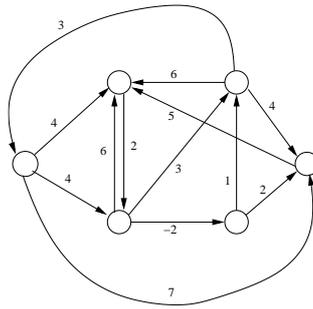


Abbildung 2: Beispiel 13

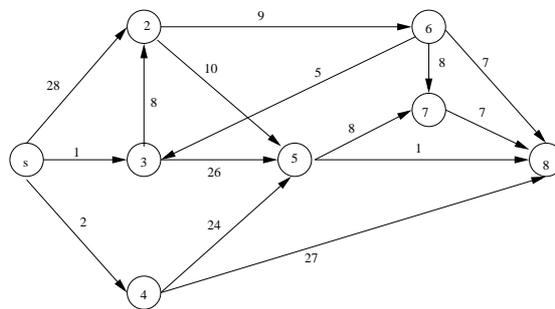


Abbildung 3: Beispiel 15, 16

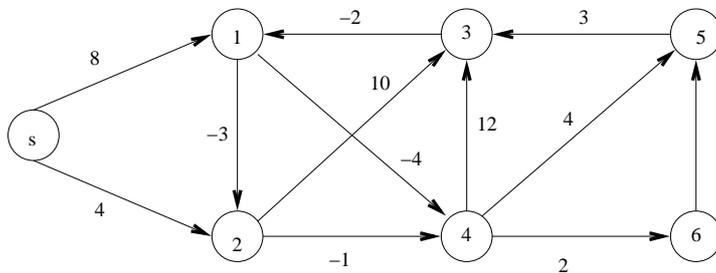


Abbildung 4: Beispiel 18

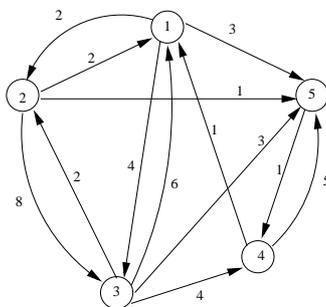


Abbildung 5: Beispiel 20