

Diskrete Mathematik SS 2012

1. Übungsblatt

1. (a) Zeichnen Sie alle paarweise nicht-isomorphen Graphen mit 5 Knoten. Welche davon sind zusammenhängend?
(b) Finden Sie alle nicht-zusammenhängenden Graphen mit ≤ 6 Knoten, in denen jeder Knoten den Grad 2 hat.
(c) Finden Sie alle paarweise nicht isomorphen Bäume mit 6 Knoten.
2. (a) Was ist die größtmögliche Kantenanzahl in einem nicht-zusammenhängenden Graphen mit n Knoten?
(b) Beweisen Sie: Wenn in einem Graphen G mit $2n$ Knoten jeder Knoten einen Grad $\geq n$ besitzt, dann ist G zusammenhängend.
3. Beweisen Sie, dass jeder Graph mit n Knoten und m Kanten mindestens $n - m$ Zusammenhangskomponenten hat.
4. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^C = (V, E')$, wobei E' genau jene Kanten enthält, die nicht in E vorkommen.
(a) Zeigen Sie: Wenn zwei Graphen isomorph sind, so sind auch ihre Komplemente isomorph.
(b) Finden Sie einen Graphen, der zu seinem Komplement isomorph ist.
(c) Kann ein Graph mit 7 Knoten zu seinem Komplement isomorph sein?
(d) Wie viele Kanten hat ein Graph mit n Knoten der zu seinem Komplement isomorph ist?
5. Sieben Mathematikstudenten fahren in die Ferien. Jeder von Ihnen schreibt Ansichtskarten an drei seiner sechs Kollegen. Ist es möglich, dass jeder Student genau von denjenigen Kollegen eine Karte bekommt, denen er geschrieben hat?
6. (a) Als Gradfolge eines Graphen bezeichnet man die aufsteigend sortierte Folge seiner Knotengrade. Die Gradfolge eines Baumes sei $1, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. *Wieviele Blätter* besitzt der Baum? Ein *Blatt* ist ein Knoten mit Grad 1 in einem Baum.
(b) Bestimmen Sie alle Bäume mit n Knoten, die genau 2 Blätter besitzen.
7. Beweisen oder widerlegen Sie: Zwei zusammenhängende Graphen mit identischen Gradfolgen sind isomorph.
8. Für welche natürliche Zahlen n gilt die folgende Aussage: Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält zwei Knoten mit gleichem Grad?
9. Zeigen Sie: Ein Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ hat genau

$$2 + \sum_{v \in V: \deg(v) \geq 3} (\deg(v) - 2)$$

viele Blätter.

10. Wieviele Knoten mit Grad fünf kann ein Baum $G = (V, E)$ mit $|V| = 16$ höchstens besitzen?
11. Bestimmen Sie alle Bäume, deren Komplement nicht zusammenhängend ist.