Diskrete Mathematik, SS 2010, 7. Übungsblatt

71. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $g = (261) \circ (458) \circ (39)$ sind Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

    (a) Stellen Sie f in Zyklenschreibweise dar.

    (b) Stellen Sie g in Standardschreibweise (als Abbildungstabelle) dar.

    (c) Berechnen Sie f^{-1}, g^3, g^{999} und $f \circ g$.

    (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Inversionen von f und bestimmen Sie ob f gerade oder ungerade ist.

72. Lösen Sie die folgenden Gleichungen für $x \in S_6$:

    (a) $$x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

    (b) $$x \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

73. Finden Sie alle Permutationen $\sigma \in S_4$, die die Gleichung
$$(132)\sigma(341) = (234)$$
erfüllen!

74. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k folgender erzeugenden Funktionen $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:

    (a) $A(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2}$

    (b) $A(x) = \frac{2x^2+2}{(x^2-2x+1)(x+1)}$

75. Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionen

    (a) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n$ für $n \geq 0$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

    (b) $a_{n+1} = 2a_n + n$ für $n \geq 0$ und $a_0 = 1$

76. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion für folgende Folgen:

    (a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, 6 \ldots)$

    (b) $(1, 2, 1, 4, 1, 8, \ldots)$

    (c) $a_n = \frac{5}{2}3^n - n - \frac{3}{2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 5$

77. Eine Kiste enthält 25 rote, 50 blaue und 60 weiße Kugeln. Auf wie viele Arten kann man aus der Kiste 80 Kugeln entnehmen?
Hinweis: Stellen Sie die erzeugende Funktion auf und verwenden Sie dann folgende Tatsachen:

    - Die Funktion $(1 + x)^r$ ist die erzeugende Funktion der Folge $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots)$ (sh. Analysisvorlesung)
    - $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{-r-1}$ (Beweis!)

    Die Aufgabe soll ohne Computer gelöst werden!

78. Finden Sie den Koeffizienten von z^k in $(z^4 + z^5 + z^6 + \ldots)^5$ für $k \geq 20$.

79. Finden Sie den Koeffizienten von z^{2k+1} in $(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots)(z^3 + z^5 + z^7 + \ldots)^3$!

80. Sei a_k die Anzahl von Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, k\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Stellen Sie eine Rekursion für a_k auf.

81. Lösen Sie das folgende System von Rekursionsbeziehungen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} &= -a_n + 2b_n - 1 \end{aligned}$$