

Diskrete Mathematik, SS 2010, 7. Übungsblatt

71. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $g = (261) \circ (458) \circ (39)$ sind Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- (a) Stellen Sie f in Zykelschreibweise dar.
- (b) Stellen Sie g in Standardschreibweise (als Abbildungstabelle) dar.
- (c) Berechnen Sie f^{-1} , g^3 , g^{999} und $f \circ g$.
- (d) Bestimmen Sie die Anzahl der Inversionen von f und bestimmen Sie ob f gerade oder ungerade ist.

72. Lösen Sie die folgenden Gleichungen für $x \in S_6$:

(a)
$$x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(b)
$$x \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

73. Finden Sie alle Permutationen $\sigma \in S_4$, die die Gleichung

$$(132)\sigma(341) = (234)$$

erfüllen!

74. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k folgender erzeugenden Funktionen $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:

(a) $A(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2}$

(b) $A(x) = \frac{2x^2+2}{(x^2-2x+1)(x+1)}$

75. Bestimmen Sie die Lösung der Rekursionen

(a) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2^n$ für $n \geq 0$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

(b) $a_{n+1} = 2a_n + n$ für $n \geq 0$ und $a_0 = 1$

76. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion für folgende Folgen:

(a) $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, 6, \dots)$

(b) $(1, 2, 1, 4, 1, 8, \dots)$

(c) $a_n = \frac{5}{2}3^n - n - \frac{3}{2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 5$

77. Eine Kiste enthält 25 rote, 50 blaue und 60 weiße Kugeln. Auf wie viele Arten kann man aus der Kiste 80 Kugeln entnehmen?

Hinweis: Stellen Sie die erzeugende Funktion auf und verwenden Sie dann folgende Tatsachen:

- Die Funktion $(1+x)^r$ ist die erzeugende Funktion der Folge $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots\right)$ (sh. Analysisvorlesung)
- $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{-r-1}$ (Beweis!)

Die Aufgabe soll ohne Computer gelöst werden!

78. Finden Sie den Koeffizienten von z^k in $(z^4 + z^5 + z^6 + \dots)^5$ für $k \geq 20$.

79. Finden Sie den Koeffizienten von z^{2k+1} in $(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots)(z^3 + z^5 + z^7 + \dots)^3$!
80. Sei a_k die Anzahl von Teilmengen der Menge $\{1, \dots, k\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Stellen Sie eine Rekursion für a_k auf.
81. Lösen Sie das folgende System von Rekursionsbeziehungen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} &= -a_n + 2b_n - 1\end{aligned}$$