Diskrete Mathematik, SS 2010, 6. Übungsblatt

52. In einem Dominospiel besteht jeder Stein aus zwei Hälften, die mit $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ Augen bemalt sind. Wie viele verschiedene Dominsteine kann das Spiel höchstens enthalten?

53. Wie viele möglichkeiten gibe es fünf (unterscheidbare) Frauen und sieben (unterscheidbare) Männer so in einer Reihe aufzustellen, dass keine zwei Frauen nebeneinander stehen?

54. Wie viele ganzzahlige Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ besitzt die Gleichung $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, wenn $x_i \geq i$ $(i = 1, \ldots, k)$ gelten muss?

55. Es sei $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Paare (A, B), sodaß A eine beliebige Teilmenge von X und B eine echte Teilmenge von A ist.

56. Bestimmen Sie die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die kein Paar aufeinander folgender Zahlen enthalten.

57. Bei einer Pokervariante bekommt man zuerst fünf Karten auf die Hand. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Paare zu haben?

58. Aus einer Gruppe von p Frauen und q Männern soll ein Team von k Personen zusammengestellt werden $(k \leq p + q)$.

    (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn im Team gleich viele Männer wie Frauen sein müssen?

    (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn im Team mindestens zwei Frauen sein müssen?

    (c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn im Team mehr Männer als Frauen sein müssen?

59. Auf wie viele Arten kann man drei Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 99\}$ auswählen, sodaß ihre Summe durch drei teilbar ist? Auf wieviele Arten kann man drei Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ auswählen, sodaß ihre Summe durch drei teilbar ist?

60. Beweisen Sie

    (a) $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$ (Hinweis: kombinatoritsche Überlegung)

    (b) $S(n, 3) > 3^{n-2}$ für $n \geq 6$ (Hinweis: Induktion nach n)

61. Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge der Kardinaltität n. Jede Relation auf A kann als Menge $R \subseteq A \times A$ dargestellt werden.

    (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Relationen auf A.

    (b) Bestimmen Sie die Anzahl der symmetrischen Relationen auf A.

    (c) Eine Relation heißt antisymmetrische, falls gilt: $(a, b) \in R$ und $a \neq b$, dann $(b, a) \notin R$. Bestimmen Sie die Anzahl der antisymmetrischen Relationen auf A.

62. Gegeben sei ein Quadrat mit Seitenlänge 2. Zeichnet man in dieses Quadrat fünf Punkte, dann haben mindestens zwei davon einen Abstand, der nicht größer als $\sqrt{2}$ ist.

63. Sei $S \subseteq \{1, \ldots, 100\}$ mit $|S| = 10$. Zeigen Sie, dass S zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 enthält, deren Elemente sich zur gleichen Summe aufaddieren.

64. Beweisen Sie durch kombinatorische Überlegungen: Für alle $1 \leq k \leq r \leq n$ gilt die Beziehung

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

65. Beweisen Sie durch kombinatorische Überlegungen: Für alle $n \geq 1$ gilt die Beziehung

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}.$$

66. Beweisen Sie durch kombinatorische Überlegungen:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{r} = 3^n.$$

67. Beweisen Sie:

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n}{m} = (-1)^k \binom{n-1}{k} \qquad \text{für } k < n$$

68. Wie viele Anordnungen der Buchstaben des Wortes *MURMUR* gibt es, in der je zwei benachbarte Buchstaben unterschiedlich sind?

69. Wie viele Zahlen kleiner gleich 1000000 sind keine Quadratzahl, keine Kubikzahl und keine fünfte Potenz einer anderen Zahl?

70. Zu einem Empfang sind n Herren geladen. Sie alle tragen Zylinder und geben diesen bei der Garderobe ab. Bei der Rückgabe ist die Garderobenfrau nicht ganz bei der Sache und gibt die Zylinder nach dem Zufallsprinzip zurück. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt keiner der Herren den richtigen Zylinder zurück?