Diskrete Mathematik, SS 2010, 4. Übungsblatt

32. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$ ein Matching in G. Dann gibt es ein Matching M' mit maximaler Kardinalität, das alle von M gematchten Knoten matcht.

33. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und M_1, M_2 zwei maximale Matchings bezüglich Inklusion. Dann gilt $|M_1| \leq 2|M_2|$.

34. Beweisen oder widerlegen Sie: Enthält ein zusammenhängender, drei-regulärer Graph ein perfektes Matching, so enthält er auch einen Hamiltonschen Kreis!

35. Beweisen oder widerlegen Sie: Enthält ein drei-regulärer Graph einen Hamiltonschen Kreis, so können die Kanten mit drei Farben gefärbt werden!

36. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein Baum enthält höchstens ein perfektes Matching!

37. Zeigen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein k-regulärer Graph, dann gilt $\chi(G) \geq \lceil \frac{n}{n-k} \rceil$

38. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Zusammenhangskomponente V_i von G heißt ungerade Komponente, wenn $|V_i|$ ungerade ist. Mit $\mathrm{oc}(G)$ bezeichnet man die Anzahl der ungeraden Komponenten von G. Zeigen Sie dass für alle Mengen $S \subseteq V$ und alle Matchings M in G
$$|M| \leq \frac{1}{2}\left(|V| - \mathrm{oc}(G[V \setminus S]) + |S|\right).$$
gilt.

39. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer bipartiter Graph. Dann lässt sich die Kantenmenge E in r disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

40. Bestimmen Sie ein stabiles Matching im vollständigen bipartiten Graphen $G = (S \cup T, E)$ mit $S = \{s_1, \ldots, s_5\}$ und $T = \{t_1, \ldots, t_5\}$ und folgenden Präferenzlisten:
$$\begin{array}{ll}
s_1 : t_4 < t_2 < t_1 < t_3 < t_5 & t_1 : s_2 < s_3 < s_5 < s_1 < s_4 \\
s_2 : t_3 < t_4 < t_2 < t_5 < t_1 & t_2 : s_3 < s_5 < s_1 < s_2 < s_4 \\
s_3 : t_4 < t_5 < t_1 < t_2 < t_3 & t_3 : s_3 < s_4 < s_2 < s_1 < s_5 \\
s_4 : t_2 < t_5 < t_1 < t_4 < t_3 & t_4 : s_1 < s_4 < s_5 < s_2 < s_3 \\
s_5 : t_1 < t_4 < t_5 < t_3 < t_2 & t_5 : s_3 < s_5 < s_2 < s_4 < s_1
\end{array}$$

41. Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (U \cup V, E)$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ und $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ durch
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
wobei $\{u_i, v_j\} \in E \iff a_{i,j} = 1$. Geben Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität an. Verwenden Sie dieses Matching um eine minimale Kontenüberdeckung zu finden!

42. Sei $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $0 \leq k < \frac{n}{2}$. Sei A bzw. B die Familie aller k-elementigen bzw. $(k+1)$-elementigen Teilmengen von S. Man bilde den bipartiten Graphen
$$G = (A \cup B, \{(a, b) : a \in A, b \in B, a \subset b\})$$
und beweise, dass G ein A überdeckendes Matching besitzt.