Diskrete Mathematik, SS 2010, 3. Übungsblatt

25. Bestimmen Sie für den Radgraph G mit 5 Knoten (sh. Abbildung 4)
    (a) die Adjazenzmatrix von G;
    (b) die Anzahl der Spannbäume mit Hilfe des Matrix-Baum-Satzes;
    (c) die Anzahl Wanderungen der Länge 4 von Knoten 1 zu Knoten 3.

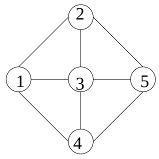


Abbildung 4: Rad mit 5 Knoten

26. Zeigen Sie, dass der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ $m^{n-1}n^{m-1}$ Spannbäumne hat.

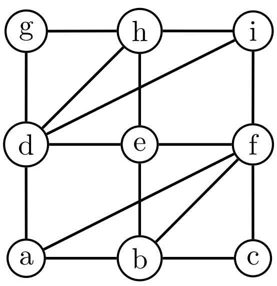
27. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
    (a) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph, dann gilt $4|E| \leq |V|^2$.
    (b) Jeder zusammenhängende, planare, k-reguläre Graph $G = (V, E)$ besitzt $\frac{4+(k-2)|V|}{2}$ Flächen.
    (c) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 13$ und G^c der Komplementgraph von G. Dann sind entweder G oder G^c nicht planar.
    (d) Ein vollständiger 3-partiter Graph $K_{r,s,t}$ ist ein 3-partiter Graph mit $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$ und jeder Knoten in V_i ist mit jedem Knoten in V_j für $i \neq j$ verbunden. Für jedes $n \geq 1$ ist der vollständige 3-partite Graph $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonsch, aber $K_{n,2n,3n+1}$ ist nicht Hamiltonsch.
    (e) Jeder zusammenhängende, 5-reguläre, planare Graph $G = (V, E)$ erfüllt $|V| \geq 12$

28. Sei $G = (V, E)$ ein k-regulärer, ebener Graph mit 9 Knoten und 11 Flächen. Bestimmen Sie k! Können sie den Graphen G bestimmen?

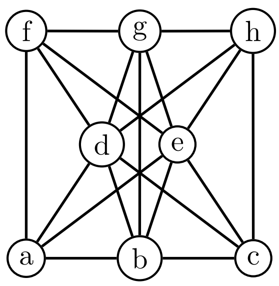
29. Beweisen Sie, dass es nur 5 platonische Körper gibt!

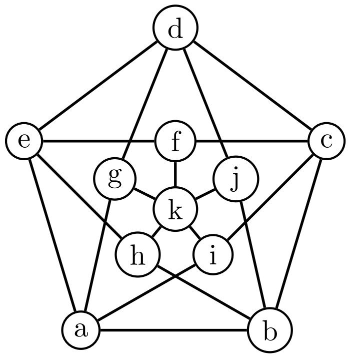
30. Bestimmen Sie, welche der folgenden Graphen planar sind. Geben Sie ggf. eine planare Einbettung an oder oder zeigen Sie, dass es einen $K_{3,3}$ oder K_5 als (topologischen) Minor gibt!

(a)



(b)



(c) 

31. Sei $T = (V, E)$ ein Baum. Zeigen Sie, dass es $k(k-1)^{n-1}$ Möglichkeiten gibt, die Knoten von T mit k Farben zulässig zu färben ($|V| = n$). Hinweis: Vollständige Induktion.