# Diskrete Mathematik, SS 2010, 2. Übungsblatt

15. Finden Sie zwei nicht isomorphe Bäume mit gleicher Gradfolge.

16. Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$ so dass der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

17. Sei $K_n$ der vollständige Graph mit einer beliebigen Orientierung der Kanten. Zeigen Sie, dass der orientierte Graph einen Hamiltonschen Weg besitzt, d.h. es gibt einen Weg im gerichteten Graphen, der jeden Knoten genau einmal besucht.

18. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann ist der Wiener Index von $G$ definiert als
$$W(G) := \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} d(u, v).$$
    (a) Sei $P_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ der Pfad mit $n$ Knoten. Zeigen Sie, dass
$$W(P_n) = \binom{n+1}{3}$$
    (b) Zeigen Sie: Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit einer ungeraden Anzahl an Knoten, dann ist $W(T)$ gerade.

19. Der Kantengraph (line graph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist definiert als $L(G) = (E, E')$ mit $E' := \{\{e, f\} \subseteq E : e \neq f, e \cap f \neq \emptyset\}$. Der Kantengraph hat also als Knoten die Kanten von $G$ und zwei Konten $e_1$ und $e_2$ des Kantengraphs sind durch eine Kante verbunden, falls $e_1$ und $e_2$ in $G$ adjazent sind.
    (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Knotengraden in $G$ und $L(G)$?
    (b) Zeigen Sie: Ist $G$ ein Eulergraph, dann ist $L(G)$ ein Eulergraph und hamiltonsch.
    (c) Zeigen Sie: Ist $G$ Hamiltonsch, dann auch $L(G)$.

20. Vervollständigen Sie den Beweis aus der Vorlesung zu folgendem Satz: Seien $u$ und $v$ zwei nicht-adjazente Knoten eines Grpahen $G = (V, E)$ mit $d(u) + d(v) \geq n$. Dann ist $G$ Hamiltonsch genau dann, wenn $G + (u, v)$ Hamiltonsch ist.

21. Die $k$-te Hamiltonsche Hülle $\mathcal{H}_k(G)$ eines Graphen $G$ ist wie folgt rekursiv definiert. Falls es in $G$ nichtadjazente Knoten $u$ und $v$ gibt mit $d(u) + d(v) \geq k$, so sei $\mathcal{H}_k(G) := \mathcal{H}_K(G + (u, v))$, sonst $\mathcal{H}_k(G) := G$. Zeigen Sie, dass die $k$-te Hamiltonsche Hülle für jedes $k \in \mathbb{N}$ wohldefiniert ist. Folgern sie daraus: Ein Graph ist Hamiltonsch genau dann, wenn seine $n$-te Hamiltonsche Hülle Hamiltonsch ist.

22. Zeigen Sie: Ein Graph $G$ mit $n \geq 3$ und $d(v) \geq \frac{n}{2}$ für alle $v \in V$ ist Hamiltonsch.

23. Überprüfen Sie mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung, ob die beiden Bäume in der Abbildung 2 isomorph sind.

24. Welche der Graphen in Abbildung 3 sind zueinander isomorph?

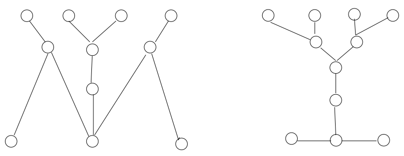

Abbildung 2: Sind diese Bäume isomorph?

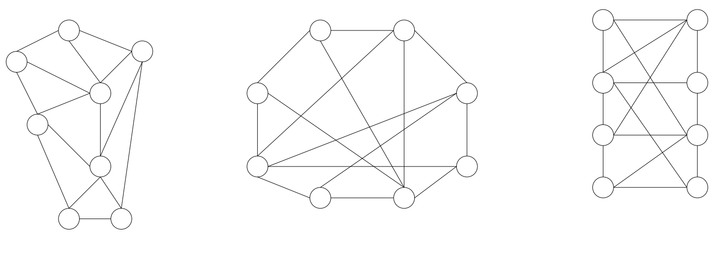

Abbildung 3: Isomorphe Graphen?