2. Klausur
Diskrete Mathematik (UE) am 11. Juni 2010

Aufgabe:	1	2	3	4	5	
Punkte:	4	4	4	4	4	= *Punkte*

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begründen!

1. Sei $(X, \preceq)$ ein Poset mit $X = \{1,2,5\} \times \{1,2,5\}$ und

$$(a,b) \preceq (c,d) \iff a \text{ teilt } c \text{ und } b \text{ teilt } d$$

   (a) Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.

   (b) Bestimmen Sie algorithmisch eine maximale Antikette und eine minimale Kettenzerlegung!

   (c) Bestimmen Sie alle minimalen und maximalen Elemente in X.

2. (a) Zeigen Sie mit kombinatorischen Argumenten die Identität:

$$\binom{3n}{3} = n^3 + 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2}$$

   (b) Beweisen Sie für alle $n \geq 0$ die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i = 4^n.$$

3. Seien A und B zwei Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = n+2$. Bestimmen Sie die Anzahl

   (a) der Funktionen von A nach B;

   (b) der injektiven Funktionen von A nach B;

   (c) der surjektiven Funktionen von B nach A.

4. Gegeben seien die folgenden zwei Permutationen

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 9 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (a) Schreiben Sie π als Produkt ziffernfremder Zyklen und als Produkt von Transpositionen.

   (b) Berechnen Sie $\phi \circ \pi$ und π^{25}.

   (c) Ist ϕ eine gerade oder eine ungerade Permutation?

5. Gegeben sei die Rekursion $a_{n+2} = -9a_{n+1} - 8a_n + 7^n$ mit $a_0 = 1$ und $a_1 = -1$. Stellen Sie die erzeugende Funktion $A(x)$ für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf.