Diskrete Mathematik 5. Übungsblatt

40. Eine offene Eulertour in einem Graphen ist eine Wanderung, die jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten verschieden sind. Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass ein Graph eine offene Eulertour enthält und beweisen Sie diese!

41. Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$ so dass der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

42. Sei K_n der vollständige Graph mit einer beliebigen Orientierung der Kanten. Zeigen Sie, dass der orientierte Graph einen Hamiltonschen Weg besitzt, d.h. es gibt einen Weg im gerichteten Graphen, der jeden Knoten genau einmal besucht.

43. Zeigen Sie: Sei $r \geq 1$ und $G = (A \cup B, E)$ ein r-regulärer bipartiter Graph. Dann lässt sich die Kantenmenge E in r disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

44. Beweisen Sie: Sei $G = (A \cup B, E)$ ein bipartiter Graph, dann gilt

$$\max\{|M| : M \text{ ist ein Matching in } G\} = |A| - \max\{|X| - |N(X)| : X \subseteq A\}$$

45. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann ist der Wiener Index von G definiert als

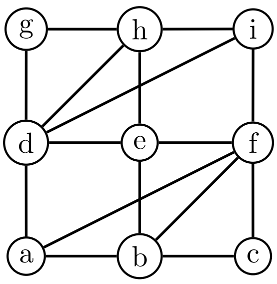
$$W(G) := \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} d(u, v).$$

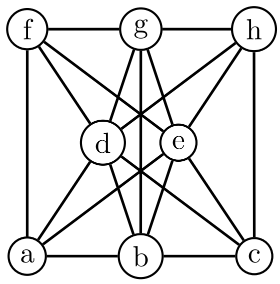
   (a) Sei $P_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ der Pfad mit n Knoten. Zeigen Sie, dass

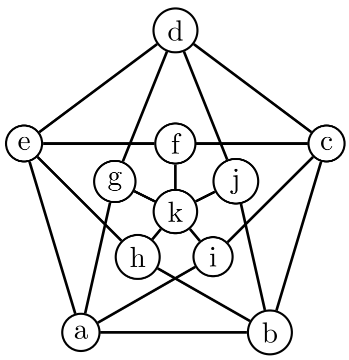
$$W(P_n) = \binom{n+1}{3}$$

   (b) Zeigen Sie: Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit einer ungeraden Anzahl an Knoten, dann ist $W(T)$ gerade.

46. Bestimmen Sie, welche der folgenden Graphen planar sind und geben Sie ggf. eine planare Einbettung an:

(a)


(b)


(c)


47. Bestimmen Sie die chromatische Zahl des Graphen $G = (V, E)$ mit

(a) $G = K_n$ ist der vollständige Graph mit n Knoten,

(b) $G = K_{m,n}$ ist der vollständige bipartite Graph mit m bzw. n Knoten,

(c) G ist ein Baum mit n Knoten,

(d) $G = C_n$ ist der einfache Kreis mit n Knoten.

48. Sei $T = (V, E)$ ein Baum. Zeigen Sie, dass es $k(k-1)^{n-1}$ Möglichkeiten gibt, die Knoten von T mit k Farben zulässig zu färben ($|V| = n$). Hinweis: Vollständige Induktion.