

Diskrete Mathematik 4. Übungsblatt

30. Entscheiden Sie algorithmisch, ob es einen Graphen mit der Gradfolge $(5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)$ gibt und finden Sie gegebenenfalls einen solchen Graphen.
31. Sei $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ eine Gradfolge eines Graphen G mit $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Zeigen Sie, dass dann für alle $r = 1, \dots, n-1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^r d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1}^n \min\{r, d_i\}.$$

32. Was ist die größtmögliche Anzahl von Kanten in einem Graphen mit n Knoten und k Zusammenhangskomponenten?
33. Für einen ungerichteten einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist der zugehörige Komplementgraph $G^c = (V, E^c)$ durch folgende Bedingung definiert: $\{u, v\} \in E^c$ genau dann wenn $\{u, v\} \notin E$.
Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $G \cong G^c$, dann gilt $|V| \equiv 0$ oder $1 \pmod{4}$.
34. Wie viele Graphen auf der Knotenmenge $\{1, 2, \dots, 2n\}$ sind isomorph zu dem Graphen, der aus n knotendisjunkten Kanten besteht?
35. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Automorphismus von G ist ein Isomorphismus von G auf sich selbst, d.h. eine Bijektion $f: V \rightarrow V$ sodass $\{u, v\} \in E$ genau dann, wenn $\{f(u), f(v)\} \in E$. Ein Graph G heißt asymmetrisch, wenn die Identität der einzige Automorphismus von G ist.
- (a) Geben Sie einen asymmetrischen Graph mit ≥ 2 Knoten an.
- (b) Bestimmen Sie die Zahl der Automorphismen für den Sternengraphen $S_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$ und $E = \{\{1, i\} \mid i = 2, \dots, n\}$.
36. Überprüfen Sie mit Hilfe des Algorithmus aus der Vorlesung, ob die beiden Bäume in der Abbildung 1 isomorph sind.

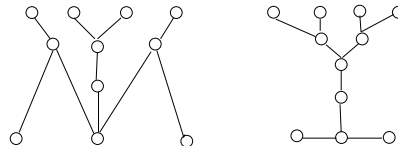


Abbildung 1: Sind diese Bäume isomorph?

37. Das Sperner'sche Lemma (Sperner 1928)
- (a) Das Sperner'sche Lemma in einer Dimension: Die Knoten des Weges $P_n = (V, E)$, wobei $V = \{0, 1, \dots, n\}$, $E = \{\{i, i-1\} \mid i = 1, \dots, n\}$, sind mit zwei Farben gefärbt, wobei die Knoten 0 und n unterschiedliche Farben haben.
Zeigen Sie: Die Anzahl der Kanten, deren Endknoten zwei verschiedene Farben haben ist ungerade.

- (b) Sei ein Dreieck mit den Ecken A_1, A_2, A_3 in der Ebene gegeben. Dieses Dreieck wird nun auf beliebige Weise in endlich viele kleiner Dreiecke unterteilt, wobei keine Ecke eines Dreiecks auf einer Kante eines der anderen kleineren Dreiecke liegen darf. Eine solche Zerlegung heißt Triangulierung.

Seien die Ecken des großen und der kleineren Dreiecke mit den Zahlen 1,2,3 markiert wobei folgende Regel erfüllt ist: Die Ecke A_i erhält die Markierung i , $i = 1, 2, 3$; und alle Ecken, die auf der (großen) Dreiecksseite zwischen A_i und A_j liegen, erhalten als Markierung entweder i oder j . Ein Beispiel ist in Abbildung 2 gegeben.

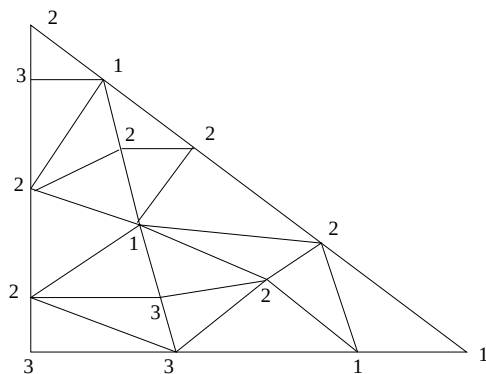


Abbildung 2: Beispiel einer Triangulierung

Zeigen Sie: Die Anzahl der dreieckigen Flächen, deren Ecken alle drei mit verschiedenen Zahlen markiert sind ist ungerade.

Hinweis: Konstruieren Sie einen Graphen wie folgt: Zeichnen Sie ins Innere jedes Dreiecks einen Knoten und einen zusätzlichen Knoten außerhalb des großen Dreiecks. Verbinden Sie zwei Knoten, wenn die entsprechenden Flächen in der ursprünglichen Zeichnung benachbart sind und die beiden gemeinsamen Knoten mit 1 und 2 markiert sind.

Wie kann man an diesem Graphen erkennen, ob ein Dreieck die im Sperner'schen Lemma gewünschte Eigenschaft hat? Welchen Grad hat der "äußere Knoten"?

38. (a) Es sei $G = (V, E)$ ein Baum mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Betrachten Sie die folgende Prozedur, die G in ein $(n - 2)$ -Tupel über $\{1, 2, \dots, n\}$ überführt: Im i -ten Schritt ($i = 1, \dots, n - 2$) wird das Blatt a mit der momentan kleinsten Nummer bestimmt. Es sei $\{a, b\}$ die zum Blatt a inzidente Kante. Wir löschen den Knoten a und die Kante $\{a, b\}$ aus dem Baum, und schreiben den Eintrag ' b ' in die i -te Komponente des $(n - 2)$ -Tupels. Beweisen Sie, daß die beschriebene Prozedur eine Bijektion zwischen den Bäumen mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und den $(n - 2)$ -Tupeln über $\{1, 2, \dots, n\}$ definiert.
- (b) Beweisen Sie, dass der vollständige Graph K_n n^{n-2} Spannbäume hat.
- (c) Beweisen Sie, daß es für $n \geq 3$ genau $(n - 2)n^{n-3}$ Bäume mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, die die Kante zwischen Knoten 1 und Knoten 2 nicht verwenden.
39. Der Kantengraph (line graph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist definiert als $L(G) = (E, E')$ mit $E' := \{\{e, f\} \subseteq E : e \neq f, e \cap f \neq \emptyset\}$. Der Kantengraph hat also als Knoten die Kanten von G und zwei Knoten e_1 und e_2 des Kantengraphs sind durch eine Kante verbunden, falls e_1 und e_2 in G adjazent sind.
- (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Knotengraden in G und $L(G)$?
- (b) Zeigen Sie: Ist G ein Eulergraph, dann ist $L(G)$ ein Eulergraph und hamiltonsch.
- (c) Zeigen Sie: Ist G hamiltonsch, dann auch $L(G)$.