Diskrete Mathematik 3. Übungsblatt

21. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: f ist ein Gruppenmonomorphismus genau dann wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

22. Gegeben seien die folgenden zwei Permutationen

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 9 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    (a) Schreiben Sie ϕ bzw π als Produkt ziffernfremder Zyklen und als Produkt von Transpositionen.

    (b) Berechnen Sie ϕ^{-1}, $\phi \circ \pi$ und $\pi \circ \phi$.

    (c) Sind die Permutationen ϕ, ϕ^{-1}, π bzw. $\pi \circ \phi$ gerade oder ungerade?

23. Berechnen Sie

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{1202}$$

    in S_5.

24. Zeigen Sie: $S_n = \langle \{(1, i) : 2 \leq i \leq n\} \rangle$

25. Der Zyklentyp einer Permutation $\pi \in S_n$ ist $[t_1, \ldots, t_n]$ mit $t_i :=$ Anzahl der i-Zyklen in der Darstellung von π als Produkt disjunkter Zyklen. Zeigen Sie, dass zwei Permutationen π, σ genau dann konjugiert sind (d.h. $\exists \rho \in S_n : \sigma = \rho\pi\rho^{-1}$) wenn π und σ vom selben Zyklentyp sind.

26. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie: $(G, \cdot)$ wirkt auf G durch Konjugation, d.h., $f : G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$

27. Sei

$$X = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} : t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

    die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ und $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $A \in G$ beliebig.

    (a) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} A \left\{ \begin{pmatrix} x \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} &:= \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \\ A \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} &:= \left\{ A \begin{pmatrix} 0 \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

    ist eine Wirkung von G auf X.

    (b) Bestimmen Sie die Bahn ℓ^G für

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

    (c) Bestimmen Sie den Stabilisator G_ℓ!

28. Eine Gruppe G der Ordnung 55 wirke auf einer Menge X mit 18 Elementen. Man zeige, dass G auf X wenigstens 2 Fixpunkte hat, d.h. $\exists x \neq y \in X : gx = x$ und $gy = y$ für alle $g \in G$.
Hinweis: Verwenden Sie die Bahnengleichung (Fixpunkte sind Bahnen mit Kardinalität 1)

29. Sei G eine Gruppenwirkung auf M und $\mathrm{Fix}_G(M) := \{x \in M : gx = x \, \forall g \in G\}$. Zeigen Sie, dass wenn $|G| = p^r$ für eine Primzahl p, dann gilt

$$|M| \equiv |\mathrm{Fix}_G(M)| \mod p.$$

Insbesondere gibt es einen Fixpunkt, wenn $|M|$ und p teilerfremd sind.