# Diskrete Mathematik 3. Übungsblatt

21. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: $f$ ist ein Gruppenmonomorphismus genau dann wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

22. Gegeben seien die folgenden zwei Permutationen

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 9 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (a) Schreiben Sie $\phi$ bzw $\pi$ als Produkt ziffernfremder Zyklen und als Produkt von Transpositionen.
   (b) Berechnen Sie $\phi^{-1}$, $\phi \circ \pi$ und $\pi \circ \phi$.
   (c) Sind die Permutationen $\phi, \phi^{-1}, \pi$ bzw. $\pi \circ \phi$ gerade oder ungerade?

23. Berechnen Sie

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{1202}$$

   in $S_5$.

24. Zeigen Sie: $S_n = \langle \{(1, i) : 2 \leq i \leq n\} \rangle$

25. Der Zyklentyp einer Permutation $\pi \in S_n$ ist $[t_1, \ldots, t_n]$ mit $t_i :=$ Anzahl der $i$-Zyklen in der Darstellung von $\pi$ als Produkt disjunkter Zyklen. Zeigen Sie, dass zwei Permutationen $\pi, \sigma$ genau dann konjugiert sind (d.h. $\exists \rho \in S_n : \sigma = \rho\pi\rho^{-1}$) wenn $\pi$ und $\sigma$ vom selben Zyklentyp sind.

26. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie: $(G, \cdot)$ wirkt auf $G$ durch Konjugation, d.h., $f : G \times G \to G$, $(g, x) \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$

27. Sei

$$X = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} x \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} : t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

   die Menge aller Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ und $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $A \in G$ beliebig.

   (a) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} A \left\{ \begin{pmatrix} x \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} &:= \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \\ A \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} &:= \left\{ A \begin{pmatrix} 0 \\ tx \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

   ist eine Wirkung von $G$ auf $X$.

   (b) Bestimmen Sie die Bahn $\ell^G$ für

$$\ell = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (c) Bestimmen Sie den Stabilisator $G_\ell$!

28. Eine Gruppe $G$ der Ordnung 55 wirke auf einer Menge $X$ mit 18 Elementen. Man zeige, dass $G$ auf $X$ wenigstens 2 Fixpunkte hat, d.h. $\exists x \neq y \in X : gx = x$ und $gy = y$ für alle $g \in G$.
Hinweis: Verwenden Sie die Bahnengleichung (Fixpunkte sind Bahnen mit Kardinalität 1)

29. Sei $G$ eine Gruppenwirkung auf $M$ und $\mathrm{Fix}_G(M) := \{x \in M : gx = x \, \forall g \in G\}$. Zeigen Sie, dass wenn $|G| = p^r$ für eine Primzahl $p$, dann gilt

$$|M| \equiv |\,\mathrm{Fix}_G(M)| \mod p.$$

Insbesondere gibt es einen Fixpunkt, wenn $|M|$ und $p$ teilerfremd sind.