Diskrete Mathematik 2. Übungsblatt

11. Zeigen Sie: Sei G eine Gruppe, $a \in G$ und $|a| = n$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$
$$|a^m| = \frac{n}{\operatorname{ggT}(n,m)}$$

12. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

13. Zeigen Sie:
    (a) In einer endlichen Gruppe G gilt
    $$a^{|G|} = e \qquad \forall a \in G$$
    (b) Ist $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $m \in \mathbb{Z}$, dann gilt
    $$m^p \equiv m \mod p.$$
    (c) Ist G eine Gruppe und $|G| = p$ für eine Primzahl p, dann ist G zyklisch.

14. Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ und $[G : H] = 2$. Zeigen Sie, dass dann $H \trianglelefteq G$ gilt.

15. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass wenn die Abbildung $\phi : a \mapsto a^{-1}$ ein Automorphismus von G ist, dann ist G abelsch.

16. Sei G eine Gruppe und dann definiert man das Zentrum von G als $Z(G) := \{x \in G : xy = yx \quad \forall y \in G\}$. Man zeige:
    (a) $Z(G)$ und jede Untergruppe von $Z(G)$ sind Normalteiler von G.
    (b) $ab \in Z(G) \implies ab = ba$.

17. Sei $H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$. Zeigen Sie, dass $(G, \cdot) \trianglelefteq (H, \cdot)$ gilt.

18. Zeichnen Sie die Nebenklassen der folgenden Normalteiler in der Gaußschen Zahlenebene:
    (a) $(\mathbb{R}, +) \trianglelefteq (\mathbb{C}, +)$.
    (b) $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \cdot) \trianglelefteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
    (c) $(\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z| = 1\}, \cdot) \trianglelefteq (\mathbb{C} \setminus 0, \cdot)$ (Zeigen Sie hier auch, dass die linke Seite tatsächlich eine Untergruppe bildet!)

19. Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Die Menge
    $$\operatorname{Nor}(H) := \{a \in G : aHa^{-1} = H\}$$
    heißt der Normalisator von H in G. Zeigen Sie:
    (a) $\operatorname{Nor}(H)$ ist Untergruppe von G.
    (b) $H \trianglelefteq \operatorname{Nor}(H)$.
    (c) Ist K eine Untergruppe von G und H Normalteiler von K, so gilt $K \subseteq \operatorname{Nor}(H)$.

20. (a) Es sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $g \in G$. Zeige, dass $\phi(g^n) = \phi(g)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
    (b) Bestimmen Sie alle Automorphismen der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0)$.