1. Klausur
Diskrete Mathematik (UE) am 8. Mai 2009

Aufgabe:	1	2	3	4	5	
Punkte:	6	5	7	4	3	
						= *Punkte*

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Sei G eine Gruppe mit Ordnung 128. Dann hat jede echte Untergruppe von G gerade Ordnung.

   (b) Sei G eine Gruppe, $H \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Wenn $N \subset H$, dann gilt auch $N \trianglelefteq H$.

   (c) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph, dann gilt $4|E| \leq |V|^2$.

2. Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ und eine Funktion $\circ : M \times M \to \mathbb{R}$ mit

$$r \circ s := \frac{r+s}{1+rs}$$

   gegeben. Ist $(M, \circ)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe?

3. Betrachten Sie die Mengen

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}, \; G := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$
$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass Δ und G Untergruppen von $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ sind und $G \leq \Delta$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\phi : \Delta \to G$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie den Kern von ϕ.

   (c) Zeigen Sie, dass $N \trianglelefteq \Delta$ gilt.

   (d) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwei Elemente von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie die Ordnung von A und B.

4. Gegeben sei die folgende Permutation

$$\phi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

   Schreiben Sie ϕ^{53} als Produkt ziffernfremder Zyklen und als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie ϕ^{-53} und berechnen Sie $\operatorname{sgn} \phi^{53}$.

5. Überprüfen Sie algorithmisch ob es einen Graphen mit Gradfolge $(5, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ gibt und geben Sie gegebenenfalls einen solchen an!