Analysis 1, WS 2007/2008, 9. Übungsblatt

53. Zeigen Sie, dass die Relation R mit

$$(A, B) \in R \iff \text{es gibt eine Bijektion } f : A \to B$$

eine Äquivalenzrelation ist. Folgern Sie daraus, dass die Menge der ungeraden, positiven Zahlen und die Menge der ganzen Zahlen gleichmächtig sind.

54. Man beweise, dass durch $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$d(a, b) = \begin{cases} d_+(a, b) & \text{falls } ab \geq 0 \\ d_+(a, 0) + d_+(0, b) & \text{falls } ab < 0, \end{cases}$$

wobei

$$d_+(a, b) := \sqrt{2}\frac{|a - b|}{(1 + |a|)(1 + |b|)},$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ erklärt wird.

55. Man untersuche die durch

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{4}{x_n}^2 + 1$$

rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

56. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 10x}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

57. Bestimmen Sie die Ansätze (Die Koeffizienten im Zähler müssen nicht bestimmt werden!) für die Partialbruchzerlegung von

(a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x - 2)(x + 4)(x^2 - 3x + 2)}$

(b) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x^2 + 2x + 2)^2(x^2 + 2x + 1)^2}$