Analysis 1, WS 2007/2008, 8. Übungsblatt

49. Für die nachstehenden Funktionen ist zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ so zu bestimmen, dass aus $|x - x_0| \leq \delta_\epsilon$ die Beziehung $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ folgt. Der Definitionsbereich der Funktion f wird hier mit $D(f)$ bezeichnet.

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad D(f) = (0, \infty)$ (b) $f(x) = \sqrt{4 + x^2} \quad D(f) = \mathbb{R}$

50. Man gebe, falls möglich, stetige Ergänzungen der folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Punkten ξ an:

    (a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}, \quad \xi = \pm 2$ (b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{(x-1)^2}, \quad \xi = 1$

51. Man untersuche, ob die folgenden Grenzwerte von Funktionen existieren und bestimme sie im Fall der Existenz:

    (a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$

52. Führen Sie für die angegebenen Funktionen folgende Untersuchungen durch:

    - Wir groß ist der maximale Definitionsbereich $D(f)$?
    - Wo ist f unstetig, rechts-unstetig, links-unstetig? Bestimmen Sie den Stetigkeitsbereich $S(f)$.
    - Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $S(f)$ (inkl. uneigentliche Häufungspunkte). Besitzt f an den Häufungspunkten Grenzwerte, eventuell auch einseitige?
    - Lässt sich f irgendwo stetig ergänzen?

    (a) $f(x) = \dfrac{3|x^2 - 4|}{3(x-2)}$, (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{falls } x > 2 \\ x^2 - \frac{7}{2} & \text{falls } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5}{2x} & x < -1 \end{cases}$