Analysis 1, WS 2007/2008, 7. Übungsblatt

40. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in \mathbb{R}$ und sei $f(a) < 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) < 0$, $\forall x \in U_\delta(a)$, wobei $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$.

41. Man untersuche, in welchen Punkten die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind:

    (a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x \le 0 \text{ oder } x > 1 \\ x^2 & \text{sonst} \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen darstellt.

    (c) $f(x) = x - [x]$ wobei $[x]$ der ganze Teil einer reellen Zahl x ist, d.h. $[x] = \max\{y \in \mathbb{Z}\colon y \le x\}$.

42. Skizzieren Sie die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \inf\{|nx - 1|\colon n \in \mathbb{N}\}$ für $x \in [1/5, 1]$. Zeigen Sie, dass f stetig in $(0,1]$ ist, und dass $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ gilt.

43. Für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{falls } x \le 1 \\ ax - x^3 & \text{falls } 1 \le x \le 2 \\ bx^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

44. Zu $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ bestimme man $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f(x) = \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} - \alpha - \frac{\beta}{x}$$

    im Ursprung stetig ergänzbar ist. Welcher Wert ist dort vorzuschreiben?

45. Geben Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \{0,1\}$ an mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

46. Man untersuche, ob die folgenden Grenzwerte von Funktionen existieren und bestimme sie im Fall der Existenz:

    (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + 1}\left(\sqrt{\frac{1}{x} + a} - \sqrt{\frac{1}{x} + 1}\right)$, $a > 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$

47. Führen Sie für die angegebenen Funktionen folgende Untersuchungen durch:

    - Wir groß ist der maximale Definitionsbereich $D(f)$?
    - Wo ist f unstetig, rechts-unstetig, links-unstetig? Bestimmen Sie den Stetigkeitsbereich $S(f)$.
    - Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $S(f)$ (inkl. uneigentliche Häufungspunkte). Besitzt f an den Häufungspunkten Grenzwerte, eventuell auch einseitige?
    - Lässt sich f irgendwo stetig ergänzen?

    (a) $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{|x|} - (1 - |x|)^2$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{|x^2 + x - 6|}$

48. Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ und $f(x + y) \le f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Weiters sei f in $x = 0$ stetig. Zeigen Sie, dass f in ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.