Analysis 1, WS 2007/2008, 2. Übungsblatt

8. Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = 2^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} = 0$

9. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n-Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{R}$. Zwei Elemente $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ im $\mathbb{R}^n$ heißen gleich, wenn $x_i = y_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

   Man untersuche, ob $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d})$ ein metrischer Raum ist, wenn d wie folgt erklärt wird:

   (a) $d(x,y) := \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$,

   (b) $d(x,y) := \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$,

   (c) $d(x,y) := \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$,

   (d) $d(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

10. Fährt man in Frankreich mit der Eisenbahn, so muss man in der Regel über Paris fahren. Dies gibt Anlass zur Definition der folgenden Französischen Eisanbahn-Metrik auf der Ebene $\mathbb{R}^2$: Sei P der Usrsprung der Ebene $\mathbb{R}^2$ und bezeichne $d(x,y)$ den euklidischen Abstand zweier Punkte $x \neq y \in \mathbb{R}^2$. Dann definiert man

$$d_P(x,y) := \begin{cases} d(x,P) + d(y,P) & \text{falls } P \text{ nicht auf der Geraden durch } x \text{ und } y \text{ liegt} \\ d(x,y) & \text{sonst} \end{cases}$$

    Außerdem definiert man $d_P(x,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ Beweisen Sie, dass d_P eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

11. Zeichnen Sie für die folgenden Metriken auf $\mathbb{R}^2$ die offenen Kugeln vom Radius 1 und 2 um die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$:

    (a) die Euklidsche Metrik (vgl. Bsp 9a),

    (b) die Maximum-Metrik (vgl. Bsp 9c),

    (c) die Manhatten-Metrik (vgl. Bsp 9d)

    (d) die Französische Eisenbahn Metrik (vgl. Bsp 10),

    (e) die diskrete Metrik.

12. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2)$$

13. Für die durch

$$a_0 = 2,\ a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}, \qquad n \ge 1$$

    rekursiv definierte Folge $(a_1, a_2, \dots)$ beweise man folgende explizite Darstellung:

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}.$$