Analysis 1, WS 2007/2008, 13. Übungsblatt

85. Sei f konvex auf $[a, b]$. Man zeige, dass für alle $u, x, v \in [a, b]$ mit $u \leq x \leq v$ gilt

$$f(x) \leq \max\{f(u), f(v)\}.$$

86. Man bestimme alle lokalen und globalen Extrema von $f(x) = \frac{x}{2^x}$ auf $[0, 10]$.

87. Für ein drehzylindrisches Gefäß bestimme man die Abmessungen so, dass das Volumen V bei vorgegebener Oberfläche S maximal, bzw. die Oberfläche S bei vorgegebenem Volumen V minimal wird.

88. Für welchen Punkt (a, b) im 1. Quadranten auf der Parabel $y = 4 - x^2$ besitzt das Dreieck, das von der Tangente in (a, b) an die Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird, minimalen Flächeninhalt?

89. Man diskutiere die folgenden Funktionen

    (a) $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$,
    (b) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|}$,
    (c) $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$.

90. Man bestimme das n-te Taylorpolynom $T_n(x, x_0; f)$ und das n-te Lagrangesche Restglied für die folgenden Funktionen um die angegebenen Entwicklungspunkte x_0:

    (a) $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = 1$ wobei $a > 0$,

    (b) $f(x) = \sin^2(x)$, $x_0 = 0$.

91. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome $T_n(x, x_0; f)$ wobei n der angegebene Grad des Polynoms ist und x_0 jener Punkt um den $f(x)$ approximiert wird. Schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab.

    (a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ durch $T_2(x, 0; f)$ in $|x| \leq 1/10$,

    (b) $f(x) = \exp(\sin^2 x)$ durch $T_2(x, \pi/4; f)$ in $|x - \pi/4| \leq 1/10$.