Analysis 1, WS 2007/2008, 10. Übungsblatt

58. Berechnen Sie ohne Benutzung der Differentiationsregeln direkt aus der Definition für
    (a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ die Ableitung $f'(2)$;
    (b) $f(x) = \sqrt{(3x-1)}$ die Ableitung $f'(4)$.
59. Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:
    (a) $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad 0 < x < 1,$
    (b) $f(x) = x^{\frac{7}{9}}\left(x^3 + \frac{x-1}{x+1}\right), \quad x > 0,$
    (c) $f(x) = \sqrt{\frac{7x+3}{4x+2}}, \quad x \neq -\frac{1}{2},$
    (d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}, \quad x > 0.$
60. Die Funktionen $f_1, \dots f_n$ seien auf dem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbar, und es gelte $f_i(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$, $i = 1, \dots, n$. Man beweise

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)'}{\prod_{i=1}^{n} f_i(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(x)}{f_i(x)}.$$

61. Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall $I = (-a, a)$ mit $a > 0$ differenzierbar, es sei $f(x)g(x) = x$ auf I und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g(0) \neq 0$ gelten muss.
62. Man bestimme die rechts- und linksseitigen Ableitungen von $f(x) = x\,|x| + 1$ in $x = 0$.
63. Prüfen Sie, ob $f(x) = x^2|x|$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ differenzierbar ist.
64. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

    Man zeige, dass g in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung. Ist die Funktion $g'(x)$ stetig?
    Hinweis: Es gilt $(\cos(x))' = -\sin(x)$
65. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei auf dem Intervall (a, b) n-mal differenzierbare Funktionen. Man beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(x)g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(f^{(k)}(x)g(x)\right)^{(n-k)}.$$

    Hinweis: Die höheren Ableitungen einer Funktion werden rekursiv definiert: $f^{(2)} = f'' = (f')', \dots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
66. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und ungerade, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Man zeige: Die Ableitung einer gerade (bzw. ungeraden) differenzierbaren Funktion ist ungerade (bzw. gerade).