Analysis 1, WS 2007/2008, 1. Übungsblatt

1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gelten folgende Ungleichungen (mit Beweis!):
   (a) $3^n > n^3$
   (b) $n! \geq 3^n$
2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Gleichungen über $\mathbb{R}$:
   (a) $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$
   (b) $\sqrt{9x^4} + 12x + 9 = 0$
   (c) $\sqrt{x^4} = 2|x| - 1$
3. Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:
   (a) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, \; b > 0$
   (b) $|a| > b \Leftrightarrow a < -b$ oder $a > b$
   (c) $2|ab| \leq a^2 + b^2$
   (d) $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$
   (e) $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$ für $a \neq 0$
4. Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:
   $(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$
5. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen:
   (a) $3 - x^2 + 2x > 0$
   (b) $x + 3 > \dfrac{x + 18}{3x - 2}$
   (c) $\dfrac{x}{x - 2} > \dfrac{x - 3}{3x - 1}$
   (d) $|x - 1| + |x + 3| \leq 4$
6. Man beweise den binomischen Lehrsatz durch vollständige Induktion.
7. Seien α und β Dedekindsche Schnitte. Zeigen Sie:
   (a) $\{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$ ist ein Dedekindscher Schnitt.
   (b) Die durch $\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$ definierte Addition erfüllt das Assoziativgesetz.
   (c) Der Dedekindsche Schnitt $\bar{0} = \{r \in \mathrm{Q} \mid r > 0\}$ ist neutrales Element bezüglich dieser Addition.