Analysis I Übungsklausur
30.11.2007
Musterlösung

Beispiel 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass auch

$$d^*(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

eine Metrik auf X ist.

Lösung

Es gilt die Axiome für d^* nachzuprüfen. Wir müssen also zeigen:

a) $d^*(x,y) \geq 0$ und $d^*(x,y) = 0 \iff x = y$

b) $d^*(x,y) = d^*(y,x)$

c) $d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y)$

Bemerkung: Für d gelten diese Axiome laut Angabe bereits.

a) $1 \geq 0$ und $d(x,y) \geq 0$, weil d Metrik. Also auch das Minimum der Beiden:

$$d^*(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \geq 0.$$

Außerdem gilt:

$$d^*(x,y) = 0 \iff \min\{1, d(x,y)\} = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y.$$

b) Weil d Metrik ist, gilt $d(x,y) = d(y,x)$ und daraus folgt:

$$d^*(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = d^*(y,x)$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} & d^*(x,y) \leq d(x,y) && (1) \\ \text{und} \quad & d^*(x,y) \leq 1 && (2) \end{aligned}$$

<u>Fall A:</u> $d(x,z) \geq 1$ oder $d(z,y) \geq 1$
Sei O.B.d.A $d(x,z) \geq 1$, dann ist

$$d^*(x,z) + d^*(z,y) = 1 + d^*(z,y) \overset{(a)}{\geq} 1 + 0 = 1 \overset{(2)}{\geq} d^*(x,y)$$

<u>Fall B:</u> $d(x,z) < 1$ und $d(z,y) < 1$
dann gilt

$$d^*(x,z) + d^*(z,y) = d(x,z) + d(z,y) \overset{\triangle\text{-Ugl}}{\geq} d(x,y) \overset{(1)}{\geq} d^*(x,y)$$

Beispiel 2

Man untersuche die folgende Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} \qquad \text{wobei } a_1 = 0.$$

Lösung

Zum Start berechnen wir uns ein paar Glieder:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{2}{3} \simeq 0.66, \qquad a_2 = \frac{6}{7} \simeq 0.86$$

Wir werden versuchen zu zeigen, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.
Beschränktheit:
Wir zeigen $a_n < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ durch Induktion nach n:

- Induktionsanfang: $n = 1$
$$a_1 = 0 < 1$$
- Induktionsvorraussetzung: Es gelte für n fest: $a_n < 1$
- Induktionsschritt: $n \to n + 1$
$$a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} \overset{\text{IV}}{<} \frac{2}{3 - 1} = 1$$

Somit ist a_n durch 1 nach oben beschränkt.
Monotonie:

$$\begin{array}{rrl}
\text{zeige:} & a_n \le a_{n+1} & \\
\iff & a_n \le \dfrac{2}{3 - a_n} & \text{(def)} \\
\iff & a_n(3 - a_n) \le 2 & (3 - a_n) > 0 \text{ weil } a_n < 1 \\
\iff & a_n^2 - 3a_n + 2 \ge 0 & \\
\iff & (a_n - 1)(a_n - 2) \ge 0 & \text{w.A. weil } a_n < 1
\end{array}$$

Bemerkung: Die Monotonie kann auch mit Induktion gezeigt werden!
Grenzwert:
Da die Folge a_n monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert sie. Für den Grenzwert a muss gelten:

$$a = \frac{2}{3 - a} \iff a^2 - 3a + 2 = 0 \iff (a - 1)(a - 2) = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat Lösungen $a = 1$ und $a = 2$, da aber die Folgenglieder alle kleiner als 1 sind, kommt $a = 2$ nicht als Grenzwert in Frage und wir haben gezeigt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

Beispiel 3

(a) $p = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1!(n+1-1)!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$

setzt $a_n = \frac{1}{n+1}$

es gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

d.h. a_n ist eine Nullfolge

Für Monotonie ist z.z.: $a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{1}{n+1} \overset{?}{\geq} \frac{1}{n+2}$

$\Rightarrow n+2 \overset{?}{\geq} n+1$ wahre Aussage

d.h. a_n ist monoton fallend $\Rightarrow$ mit Leibniz-Kriterium: die Reihe ist konvergent

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - 1$

wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - 1$ ist divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ ist nicht absolut divergent

(c) $p = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2!(n+1-2)!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n(n+1)}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{2}{n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$

es gilt $\frac{2}{n^2+n} \leq \frac{2}{n^2}$, da $2n^2 \leq 2n^2 + 2n$ gilt

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$

wir wissen aber, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist

$\Rightarrow$ mit Majorantenkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n(n+1)}$ ist absolut konvergent

Beispiel 4

Problem: $\left.\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}\right|_{x=1} = \frac{0}{0}$ und $\left.\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3}\right|_{x=3} = \frac{0}{0}$

betrachte den Nenner: $x^2 - 4x + 3 = 0$

und löse mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen: $x_{1,2} = 2 \pm 1$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

Analog betrachten wir den Zähler: $x^4 - 10x^2 + 9 = y^2 - 10y + 9 = 0$ mit $y = x^2$

$\Rightarrow y_{1,2} = 5 \pm 4$

$\Rightarrow y^2 - 10y + 9 = (y-9)(y-1) = (x^2-9)(x^2-1) = (x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$

damit erhalten wir für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} : f(x) = \frac{(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-3)} = (x+3)(x+1)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} (x+3)(x+1) = 8$
$\lim_{x\to 3\pm} f(x) = \lim_{x\to 3\pm} (x+3)(x+1) = 24$
$\Rightarrow$ für $A = 8$ und $B = 24$ ist f stetig