Name: **Matrikelnr./Kennzahl:**

Analysis 1 — 24. Mai 2003

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6		
Punkte:	4	5	6	7	3	5		
							=	*Punkte*

1. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[6]{k}} \geq \sqrt[6]{n^5}$$

2. Sei
$$w = \frac{-3iz}{z-2i}.$$
Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, für die $0 < \operatorname{Im} w < \operatorname{Re} w$ und $|w| > 3$ (gleichzeitig) gilt. Skizzieren Sie den Bereich in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihe in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{x^n \sqrt{n^2+49}}.$$
Achten Sie darauf, dass Sie für jede reelle Zahl x eine Aussage treffen!

4. Diskutieren Sie die Funktion
$$f(x) = \frac{2+2a}{6x+2ax-8-4a-x^2}$$
in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ (Definitionsbereich, Nullstellen sowie Extremstellen (inkl. deren Typ)).

5. Zeigen Sie: Die Menge der ganzen Zahlen bildet mit $d(n,m) = |n-m|$ einen metrischen Raum, in welchem jede Teilmenge sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

6. Für $n \geq 1$ betrachte die Folge
$$a_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}.$$
   (a) Konvergiert die Folge a_n?
   (b) Konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|a_n\|?$$
   (c) Konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_n?$$