Analysis 2, SS 2010, 9. Übungsblatt

46. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist und verwenden Sie dabei

(a) die ε-δ-Definition,
(b) Folgen,
(c) Polarkoordinaten.

47. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit im Ursprung:

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-y^2} & \text{für} \quad |x| \neq |y| \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

48. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2} & \text{für}(x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für}(x,y) = 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen im Ursprung!
(b) Ist f total differenzierbar?

49. Man überprüfe die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Ist die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch $(0,0)$ stetig? Weiters berechne man aim Ursprung den Gradienten und die Ableitung in Richtung $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$.

50. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(xy)}{y} & \text{für} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad y = 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f_x(x,0)$ und $f_y(x,0)$
(b) Existiert die partielle Ableitung f_{yx} im Ursprung? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert!
(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 1)$ in Richtung von $v = (1,1)^t$

51. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von

$$f(x,y) = xy^3 + 2e^x \sin y + \frac{x}{y^2}$$

im Punkt $(1, \pi)$.