Analysis 2, SS 2010, 12. Übungsblatt

65. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$$

   (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f (inkl. Typangabe und zugehörigem Funktionswert).

   (b) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f (inkl. Typangabe und zugehörigem Funktionswert) im durch $x^2 + y^2 \leq 4$ beschriebenen Bereich.

66. Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der Funktion

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1)$$

auf dem (abgeschlossenen) Halbkreis mit Radius 1, Mittelpunkt im Ursprung, der in der rechten Halbebene liegt.

67. Überprüfen Sie, ob folgende Vektorfelder ein Potential U besitzen und geben Sie U gegebenenfalls explizit an!

   (a)
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : g(x, y) \mapsto (2xy, x^2 + 3y^2)$$

   (b)
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) \mapsto (y \cos(xy), x \cos(xy) + 2yz^3, 3y^2 z^2)$$

   (c)
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) \mapsto (x^2 y, x - z, xyz)$$

68. Berechnen Sie

$$\int_C x\, dx + yz\, dy + (z^2 - x)\, dz$$

für

   (a) $C : \vec{x}(t) = (t, 1-t, t), 0 \leq t \leq 1$

   (b) $C : \vec{x}(t) = (t^2, 1-t, t), 0 \leq t \leq 1$

69. (a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $g(x, y) := (2xy + 1, x^2)$ konservativ ist und berechnen Sie seine Potentialfunktion!

   (b) Berechnen Sie weiters

$$\int_C (2xy + 1)\, dx + x^2\, dy,$$

   wobei C den Kreisbogen $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq x$, $0 \leq y$ mit Anfangspunkt $(2, 0)$ und Endpunkt $(0, 2)$ bezeichne, direkt und mit Hilfe der Potentialfunktion!

70. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (-5 \cos x + 5 \sin x)\, dx + (2z + 6y)\, dy + 2y\, dz$$

wobei C der geschlossene Polygonzug durch die Punkte $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$ und $(0, 0, 0)$ ist.