Analysis 2, SS 2010, 10. Übungsblatt

52. Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Stellen Sie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
in Polarkoordianten dar!

53. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach x und y der Funktion $f = 3a^2 - 4ab$ wobei $b = x + y$ und $a = x - y$ mit Hilfe der Kettenregel!

54. Gegeben seien die Funktionen
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x^2, xy, xy^2)$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (u, v, w) \mapsto (\sin u, \cos(vw))$$
Bestimmen Sie die Funktion $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von h direkt und mit Hilfe der Kettenregel!

55. Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to R$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ seien definiert durch
$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y^5}{2x^4+y^4} & \text{für}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
und $g(t) = (t, t)$.
   (a) Zeigen Sie, dass f im Ursprung stetig und partiell nach x und y differenzierbar ist.
   (b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f \circ g$ im Nullpunkt und bestimmen Sie die Funktionalmatrix von g im Punkt 0. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle (f_x(0, 0), f_y(0, 0)), J_g(0) \rangle$! Warum steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zur Kettenregel?

56. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt (x_0, y_0) (bis zu Gliedern einschließlich 2. Ordnung):
   (a) $f(x, y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$, $(x_0, y_0) = (1, \pi)$
   (b) $f(x, y) = \sin(xy) + x \ln y$, $(x_0, y_0) = (-\pi, 1)$

57. Beweisen Sie die Formel für die zweite Ableitung einer impliziten Funktion aus der Vorlesung:
$$g''(x) = \frac{-1}{f_y^3} \left(f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2 \right)$$

58. Bestimmen und klassifizieren Sie die simgulären Kurvenpunkte der impliziten Funktion $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$ und bestimmen Sie sämtliche Extrema in y-Richtung!