Analysis 2, SS 2010, 1. Übungsblatt

1. Man untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzfunktion. Ist die Funktionenfolge an den jeweils angegebenen Intervallen gleichmäßig konvergent?

   (a) $f_n(x) = x + \frac{x}{e^{nx}} \quad x \in [0, \infty)$
   (b) $f_n(x) = n\,(\sqrt[n]{x} - 1) \quad x \in [1, \infty)$
   (c) $f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \quad x \in [0, \infty)$
   (d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [a, 1]\ (0 \leq a < 1)$
   (e) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{nq} & \text{falls } x = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}_0,\ ggT(p,q) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$

2. Zeigen Sie, dass die beiden Funktionenfolgen

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{n} & x > 0 \\ \frac{1}{n} & x = 0 \end{cases}$$

   und $g_n(x) = \frac{1}{n}$ auf der Menge $X = [0, \infty)$ gleichmäßig konvergieren, aber die Folge $\{f_n(x)g_n(x)\}$ auf X nicht gleichmäßig konvergiert.

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Sei die Funktionenfolge $f_n(x)$ auf der Menge X gleichmäßig konvergent. Dann ist auch die Funktionenfolge $\{\frac{1}{n} f_n(x)\}$ auf X gleichmäßig konvergent.

4. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Man zeige:
   (a) (f_n) ist auf $[0, 1]$ nicht gleichmäig konvergent.
   (b) Es gilt für alle $x \in [0, 1]$:

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

5. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n(x) = n^2 x(x-2)(1-x)^n.$$

   (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ auf der die Funktionenfolge punktweise konvergiert!
   (b) Auf welchen teilintervallen von $\mathbb{R}$ konvergiert die Folge f_n gleichmäßig?

6. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

   (a) Man untersuche (f_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzfunktion f. Ist die Konvergenz gleichmäßig?
   (b) Fü welche x ist f differenzierbar und gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$?

7. Zeigen sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ für alle $x \in [0, \infty]$ konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion!

8. Für welche $x \in \mathbb{R}$ darf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

   gliedweise differenziert werden?