Analysis 2, SS 2008, 9. Übungsblatt

40. Zeigen Sie: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen wiederum abgeschlossene Mengen sind.

41. Untesuchen Sie die folgenden Funktionen $f(x, y)$ auf Stetigkeit, wobei $f(0, 0) = 0$ und für alle anderen $(x, y) \in \mathbb{R}$

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$

    (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{y^2 + x^4}$

    gelten soll.

42. Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben. Stellen Sie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$$
in Polarkoordianten dar!

43. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(xy)}{y} & \text{für} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad y = 0 \end{cases}$$

    (a) Berechnen Sie $f_x(x, 0)$ und $f_y(x, 0)$

    (b) Existiert die partielle Ableitung f_{yx} im Ursprung? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert!

    (c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 1)$ in Richtung von $v = (1, 1)^t$

44. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene von
$$f(x,y) = y^2 + 2xye^x + 4e^{2x}$$
im Punkt $(0, 1)$. Für welche Punkte (x, y) enthält die zugehörige Tangentialebene die x-Achse?

45. Gegeben sei die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^4+y^8}{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    (a) Man zeige, dass die Funktion stetig in $(0, 0)$ ist!

    (b) Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen in $(0, 0)$!

    (c) Ist f auch total differenzierbar?

46. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3 + y^9} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    (a) Untersuchen Sie, ob die partielle Ableitung $f_x(0, 0)$ existiert und berechnen Sie ggf. deren Wert.

    (b) Untersuchen Sie, ob die partielle Ableitungen $f_{xy}(0, 0)$ existiert und und berechnen Sie ggf. deren Wert.

    (c) Bestimmen Sie den Wert der Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 1)$ in der Richtung von $v = (1, 0)^t$.

    (d) Zeigen Sie, daß f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig ist.