Analysis 2, SS 2008, 4. Übungsblatt

15. Man beweise folgende Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k > \ln(1+x) \qquad \text{für} \qquad x > -1, x \neq 0.$$

16. Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

    (a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$$

    (b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x-3)^n$$

17. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^3+4x}{x^2-4}$ in eine Potenzreihe um $x_0 = 1$.

18. Geben Sie eine Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ um den Nullpunkt an!

19. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$ in eine Taylorreihe!

20. Zu $a > 0$ ermittle man eine wachsende Folge von Treppenfunktionen, die auf dem Intervall $[0, a]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = x$ konvergiert. Man berechne so das Integral

$$\int_0^a x \, dx.$$

21. Es sei $I_m^n(x) = \int x^m (\ln x)^n \, dx$. Man zeige die Rekursionsformel

$$I_m^n = \frac{x^{m+1}}{1+m} (\ln x)^n - \frac{n}{1+m} I_m^{n-1}$$

    und berechne damit $\int x^3 (\ln x)^2 \, dx$.

22. Man ermittle die folgenden Integrale:

    (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln^2(x)}} \, dx$

    (b) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

    (c) $\displaystyle\int \frac{2x^5 - x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 20x - 8}{x^4 + 2x^2 + 8x + 5} \, dx$

    (d) $\displaystyle\int x^3 \sin(2x) \, dx$