Analysis 2, SS 2008, 2. Übungsblatt

7. Man untersuche, ob die folgenden Funktionenfolgen auf den jeweils angegebenen Intervallen gleichmäßig konvergieren:

   (a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [a,1] \ (0 \leq a < 1)$

   (b) $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 - n(x - \frac{1}{n}), & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad x \in [0,2]$

   (c) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{nq} & \text{falls } x = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}_0,\ ggT(p,q) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$

8. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Man zeige:
   (a) (f_n) ist auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergent.
   (b) Es gilt für alle $x \in [0,1]$:
   $$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x).$$

9. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit
   $$f_n(x) = \frac{1+n^2x^3}{(1+n^2x^2)^2}.$$

   (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ auf der die Funktionenfolge punktweise konvergiert und die dort definierte Grenzfunktion!

   (b) Geben Sie ferner an, auf welchen Intervallen $[a,b]$ die Funktionenfolge gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert.

10. Gegeben ist die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

    (a) Man untersuche (f_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzfunktion f. Ist die Konvergenz gleichmäßig?

    (b) Für welche x ist f differenzierbar und gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$?

11. Zeigen sie, dass die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ für alle $x \in [0,\infty]$ konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion!

12. Für welche $x \in \mathbb{R}$ darf die Reihe
    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$
    gliedweise differenziert werden?