Analysis 2, SS 2008, 11. Übungsblatt

49. Der Laplace-Operator Δ einer Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\Delta u(x, y, z) := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Stellen Sie Δu in Zylinderkoordinaten dar!

50. Bestimmen Sie jene Punkte auf der Ellipse $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 30$, die minimalen bzw. maximalen Abstand zum Ursprung haben!

51. Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x, y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(b) Was lässt sich über die globalen Extrema von f im Bereich $0 \leq |x|, |y| \leq 1$ aussagen?

52. Die Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sei durch

$$T(x, y, z) = xz + yz$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die kältesten bzw. wärmsten Punkte auf der Kugel.

(b) Wo liegen die kältesten bzw. wärmsten Punkte unter der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$?

53. Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!