Name: **Matrikelnr./Kennzahl:**

Analysis II Übungsklausur
26. Juni 2008

Aufgabe:	1	2	3	4	
Punkte:	5	5	5	5	
				=	*Punkte*

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten zu begründen!

1. Gegeben sei die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \cos^2 t \\ \sin t + \cos t \sin t \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \le t \le 2\pi$!
Hinweis: $1 + \cos(t) = 2\cos^2(\frac{t}{2})$

(b) Bestimmen Sie die Krümmung im Punkt $(2, 0)$!

Lösung:

(a) Wir berechnen die Bogenlänge L als $\int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{x}}(t)\| dt$. Dafür benötigen wir zuerst

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) \\ \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \|\dot{\vec{x}}(t)\|^2 &= \sin^2(t) + 4\sin^2(t)\cos(t) + 4\sin^2(t)\cos^2(t) \\ &\quad + \cos^2(t) + \cos^4(t) + \sin^4(t) + 2\cos^3(t) \\ &\quad - 2\cos(t)\sin^2(t) - 2\cos^2(t)\sin^2(t) \\ &= 2 + 2\sin^2(t)\cos(t) + 2\cos^3(t) \\ &= 2 + 2\cos(t) = 4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} L = \int_0^{2\pi} 2|\cos(t/2)|\, dt &= 2\left(\int_0^{\pi} \cos(t/2)\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(t/2)\, dt\right) = \\ &= 2\left(2\sin(t/2)\Big|_0^{\pi} - 2\sin(t/2)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 8 \end{aligned}$$

(b) Der Punkt $(2,0)$ ist bei $\overrightarrow{x}(0)$, also für $t=0$ zu finden. Wir brauchen also

$$\kappa(0) = \frac{\dot{x_1}(0)\ddot{x_2}(0) - \dot{x_2}(0)\ddot{x_1}(0)}{\left(\dot{x_1}^2(0) + \dot{x_2}^2(0)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir berechnen noch die zweite Ableitung:

$$\ddot{\overrightarrow{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) - 2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) \\ -\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Und wegen

$$\dot{\overrightarrow{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \ddot{\overrightarrow{x}}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$\kappa(0) = \frac{0 \cdot 0 - (-3) \cdot 2}{(0+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}.$$

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2} & \text{für}(x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für}(x,y) = 0 \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen im Ursprung!

(b) Ist f total differenzierbar?

Lösung:

(a) Gemäß Definition berechnen wir die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\|\vec{v}\| = 1$ als:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3a^3 + t^4a^4))}{t(t^2(a^2+b^2))} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3(a^3+ta^4))}{t^3} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t^3(a^3+ta^4))3t^2a^3 + 4t^3a^4}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t^3(a^3+ta^4))t^2(3a^3+4ta^4)}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t^3(a^3+ta^4))(3a^3+4ta^4)}{3} = a^3 \end{aligned}$$

(b) Für $\vec{v} = e_1$ bzw. $\vec{v} = e_2$ erhalten wir aus obigem

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sollte f total differenzierbar sein, müsste für alle $\vec{v}$ gelten:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(0,0) = \langle \operatorname{grad} f(0,0)\ ,\ \vec{v} \rangle$$

Tatsächlich gilt aber

$$a^3 = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(0,0) \neq \langle \operatorname{grad} f(0,0)\ ,\ \vec{v} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle = a$$

und die Funktion f ist somit in $(0,0)$ nicht total differenzierbar.

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (x^2+y^2)((x-1)^2+y^2).$$

(a) Berechnen Sie die lokalen Extrema von f und bestimmen Sie ob ein Maximum oder Minimum vorliegt!

(b) Geben Sie alle globalen Extrema von f im Bereich B an, wobei

$$B = \{(x,y) \mid y \geq x-1, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

Lösung:

(a) Wir untersuchen wo der Gradient der Funktion 0 wird:

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x((x-1)^2+y^2) + 2(x^2+y^2)(x-1) \\ 2y((x-1)^2+y^2) + 2(x^2+y^2)y \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also zwei Gleichungen:

$$2x((x-1)^2+y^2) + 2(x^2+y^2)(x-1) = 0 \qquad (1)$$
$$2y((x-1)^2+y^2) + 2(x^2+y^2)y = 0 \qquad (2)$$

<u>Fall 1:</u> $y \neq 0$
In diesem Fall sind bei (2) sowohl $(x-1)^2+y^2$ als auch x^2+y^2 positiv und die Gleichung ist nur erfüllt, wenn $y=0$ ist. (Widerspruch)
<u>Fall 2:</u> $y = 0$
Hier wird (1) zu:

$$2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0, \quad x = 1 \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2}$$

Wir haben also als Kandidaten für Extrema die drei Punkte

$$P_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_3 : \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um die vorliegenden Punkte genauer zu klassifizieren benötigen wir die *Hesse-Matrix*.

$$\begin{aligned}
f_{xy} &= 4xy + 4y(x-1) \\
f_{xx} &= 2(x-1)^2 + 4y^2 + 8x(x-1) + 2x^2 \\
f_{yy} &= 2(x-1)^2 + 12y^2 + 2x^2 \\
H(x,y) &= \begin{pmatrix} 2(x-1)^2 + 4y^2 + 8x(x-1) + 2x^2 & 4xy + 4y(x-1) \\ 4xy + 4y(x-1) & 2(x-1)^2 + 12y^2 + 2x^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir:

$$\begin{aligned}
H(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \ldots \text{positiv definit} \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\
H(1,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} && \ldots \text{positiv definit} \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\
H(1/2,0) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \ldots \text{indefinit} \Rightarrow \text{kein lokales Extremum}
\end{aligned}$$

(b) Das einzige Extremum aus unseren vorhergehenden Überlegungen, welches in B liegt ist P_1. Da f aus lauter Quadraten besteht nimmt es stets nichtnegative Werte an. Da in B $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ gilt, ist P_1 globales Minimum in B.

Es bleibt also lediglich noch zu klären ob und wo es ein globales Maximum gibt. Setzen wir aber beispielsweise $y = 0$ und lassen x gegen $-\infty$ laufen (wir verlassen B dabei nicht), erhalten wir

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = \lim_{x \to -\infty} x^2(x-1)^2 = \infty$$

und somit kann es kein globales Maximum geben.

4. Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_B (1 + 3\sin y)\, dx\, dy\, dz$$

woebi B der von den Flächen $z = -1 + \sqrt{(x^2+y^2)}$ und $z = \sqrt{(1-x^2-y^2)}$ eingeschlossene Volumsbereich ist!

Lösung:

Zunächst interpretieren wir unsere beiden Grenzen

I) $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ und

II) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Wir formen I) um auf $(z+1)^2 = x^2 + y^2$ und erkennen, dass wir für ein festes z (also geometrisch *auf Höhe* z) in der x-y-Ebene einen Kreis mit Radius $z+1$ vorliegen haben. Lässt man z nun laufen ergibt sich ein bei $z = -1$ startender nach oben offener Kegel, der bei $z = 0$ Radius 1 hat. Weiters lässt sich II) auf $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ umformen und wir sehen eine Kugel mit Radius 1 um den Nullpunkt. Der eingeschlossene Volumsbereich ist also die obere Hälfte der Kugel und der Teil des Kegels unterhalb der x-y-Ebene.

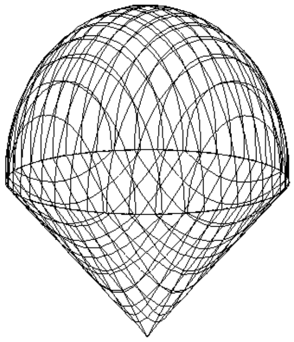

Abbildung 1: Die Gestalt des Integrationsbereiches B

Wir schreiben das Integral nun um auf

$$\underbrace{\iiint_B 1\,dx\,dy\,dz}_{\mathrm{Vol}(B)} + 3 \iiint_B \sin(y)\,dx\,dy\,dz.$$

Der erste Summand ist genau das Volumen der beschriebenen Figur (Dieses könnten wir direkt als Volumen(Halbkugel) + Volumen(Kegel) $= 2\pi/3 + \pi/3 = \pi$ berechnen). Im zweiten Summanden integrieren wir eine in y ungerade Funktion auf einem Bereich der gemäß vorherigen Überlegungen symetrisch bezüglich der x-z-Ebene ist. Der ganze zweite Summand ist daher gleich null.

Zum Ansatz des Integrals verwenden wir Zylinderkoordinaten also $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$, wobei $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le r \le 1$. Da somit $x^2 + y^2 = r^2$ ist, sind unsere Grenzen für z mit $-1+r$ und $\sqrt{1-r^2}$ gegeben. Nicht zu vergessen ist auch die Funktionaldeterminante der Parametrisierung.

$$\iiint_B 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=-1+r}^{\sqrt{1-r^2}} r\;dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r(\sqrt{1-r^2}+1-r)\;dr\,d\varphi$$
$$= \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\sqrt{1-r^2}\;dr\,d\varphi}_{=:A} + \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r-r^2\;dr\,d\varphi}_{=:B}$$

Im Folgenden verwenden wir:

$$\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} = -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

und es folgt

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{3}d\varphi$$
$$\Rightarrow A = \frac{2}{3}\pi$$
$$B = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r-r^2\;dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3)\Big|_0^1 d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}d\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\iiint_B (1+3\sin y)\,dx\,dy\,dz = \pi.$$