Analysis II - Übungsklausur 1

05.05.2008

Lösungen

1. Gegeben sei die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}$$

   (a) Bestimmen Sie alle x für die die Funktionenfolge punktweise konvergiert und geben Sie die dort definierte Grenzfunktion an.

   (b) Konvergiert die Funktionenfolge auf $[0, 1]$ gleichmäßig?

   Lösung:

   (a) Sei x fest. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2 + x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{x/n}^{\to 0}}{1 + \underbrace{x^2/n^2}_{\to 0}} = 0$$

   Also konvergiert die Funktionenfolge für alle $x \in \mathbb{R}$ punktweise gegen 0 und wir erhalten als Grenzfunktion $0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$.

   (b) Wir verwenden das Supremumskriterium und untersuchen den Abstand der Funktionenfolge zur Grenzfunktion:

$$g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \qquad x \in [0, 1]$$

   Wir suchen nun das Maximum von $g_n(x)$ in $[0, 1]$. Ableiten liefert

$$g_n'(x) = \frac{n(n^2 - x^2)}{n^2 + x^2}.$$

   Nullsetzen würde hier ein Extremum bei $x = n$ liefern, dieses fliegt aber schon ab $n = 2$ aus dem betrachteten Intervall. Weitere Extrema müssten also am Rand des untersuchten Intervalls liegen. Ab $n = 2$ ist $n^2 - x^2$ und somit g_n' positiv für alle $x \in [0, 1]$. Deswegen ist g_n monoton wachsend auf $[0, 1]$ und das Maximum liegt daher bei $x = 1$. Zusammenfassend erhalten wir

$$\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(1) = \frac{n}{n^2 + 1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

   und somit ist (f_n) auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergent.

2. Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

   (a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 + 2\cos(\frac{n\pi}{4})}{\ln n} \right)^n \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$$

Lösung:

(a) Wir berechnen den Konvergenzradius als $\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Es gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|1 + 2\cos(\frac{n\pi}{4})\right|}{\ln n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{3}{\ln n} = 0$$

und daher erhalten wir $\rho = \infty$ und die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir betrachten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^3(3(n+1))!}{(3n)!((n+1)!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = 27$$

Da dieser Genzwert existiert, ist er auch schon der Konvergenzradius und es gilt $\rho = 27$.

3. Geben Sie eine Reihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

um den Nullpunkt an!
Hinweis: Partialbruchzerlegung!
Lösung:

Das Nennerpolynom faktorisiert lautet:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

Also lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung wie folgt:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Multiplizieren des Ansatzes mit $(x-3)(x-2)$ liefert die Gleichung:

$$1 = A(x-2) + B(x-3)$$

Setzt man nun für $x = 3$, so erhält man $A = 1$, und für $x = 2$, $B = -1$.
Nun muss man $\frac{1}{x-3}$ bzw. $\frac{1}{x-2}$ als Reihe darstellen. Dies macht man, indem man die Brüche so umformt, dass sie vom Typ $\frac{1}{1-q}$ mit $|q| < 1$ sind, man also eine geometrische Reihe um den Entwicklungspunkt 0 erhält:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{x}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

Fasst man diese beiden Reihen zusammen, erhält man die gewünschte Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$$

4. Man ermittle die folgenden Integrale:

   (a)
$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2\,dx$$

   (b)
$$\int \frac{dx}{2+\cos x}$$

Lösung:

(a) Hier führt zweimaliges partielles Integrieren auf die gewünschte Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}(\ln x)^2\,dx &= \frac{2}{3}(\ln|x|)^2 x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{4}{3}\ln x\sqrt{x}\,dx = \\
&= \frac{2}{3}(\ln|x|)^2 x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9}\ln|x| x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}\int \frac{2}{3}\sqrt{x}\,dx = \\
&= \frac{2}{3}(\ln|x|)^2 x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9}\ln|x| x^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

(b) Dieses Integral lässt sich mittels der Standardsubstitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ lösen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \\
&= \int \frac{1+t^2}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \\
&= \int \frac{2}{3+t^2}\,dt = \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}\,dt = \\
&\left[\begin{array}{c} u = \frac{t}{\sqrt{3}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right] \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\sqrt{3}\,du = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u + C = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$