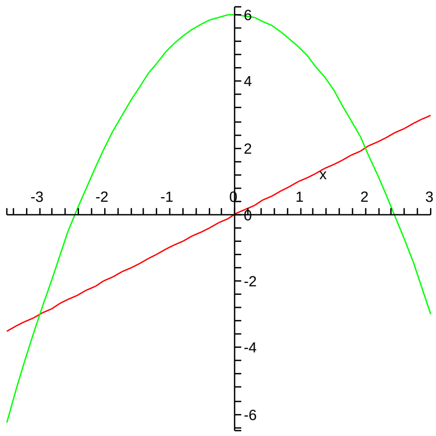
Tutorium Mathematik I M WM

25.5.2007
Lösungen

1. Bestimmen Sie
$$\int\int_B x^2\,dx\,dy$$
für den (beschränkten) Bereich B, der durch die Gleichungen $y = x$ und $y = 6 - x^2$ begrenzt wird.

<u>Lösung:</u>

Die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ (siehe Abbildung). Daher haben wir folgende Schranken: $-3 \le x \le 2$ und $x \le y \le 6 - x^2$. Wir berechnen daher folgendes Integral:



$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-3}^{2}\int_{y=x}^{6-x^2} x^2\,dydx \\ &= \int_{x=-3}^{2} x^2(6 - x^2 - x)dx \\ &= 2x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{2} = \frac{125}{4} \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3-\lambda & 2 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(\lambda(3+\lambda)-4) - 2(-2\lambda+2) - (4-(3+\lambda)) \\
&= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5
\end{aligned}$$

Das charakterische Polynom wird 0 gesetzt. Durch Faktorisieren des charakteristischen Polynoms folgt daher: $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5 = -(\lambda+5)(1-\lambda)^2 = 0$ und daher ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ein zweifacher Eigenwert und $\lambda_3 = 5$ ein einfacher Eigenwert.

Bestimmen wir nun die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Hierfür lösen wir das lineare Gleichungssystem $Ax = \lambda x$ bzw. $(A - \lambda E)x = 0$ für $\lambda = 1$. Das zu lösende Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

Nach der ersten Iteration zur Bestimmung der Zeilen-Stufen-Form erhalten wir folgendes transformierte System:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

Es muss also die Gleichung $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ gelten. Setzen wir zwei Parameter $x_2 = s$ und $x_3 = t$, so folgt $x_1 = 2s - t$. Also lautet die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

wobei s und t beliebige Parameter sind. Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ wird daher von den Vektoren v_1 und v_2 aufgespannt mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es verbleibt noch, den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ zu bestimmen. Das zugehörige homogene Gleichungssystem hat die Form:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} x = 0$$

Durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile und der üblichen Transformation zur Bestimmung der Zeilen-Stufen-Form erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir setzen den Parameter $x_3 = t$ und erhalten aus der zweiten Gleichung: $x_2 + 2x_3 = x_2 + 2t = 0$. Daher folgt $x_2 = -2t$. Und schließlich liefert die erste Gleichung $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -x_1 - 4t + 5t = 0$. Daher gilt $x_1 = t$. Die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

und daher wird der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$ vom Vektor v_3 aufgepannt mit

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$