

Tutorium Mathematik I M WM

11.5.2007

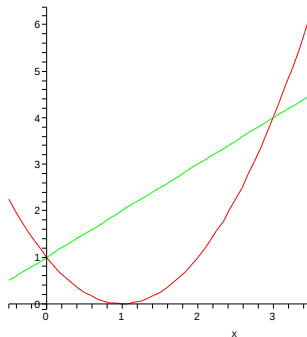
Lösungen

1. Gegeben sei die Fläche

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x + 1, y \geq (x - 1)^2\}.$$

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von F .

Lösung: Zuerst fertigen wir eine Skizze der Fläche an:



Die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen bei $(0, 1)$ und $(3, 4)$, da

$$x + 1 = y = (x - 1)^2 \iff x + 1 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x - 3) = 0.$$

Daher kann die Fläche wie folgt beschrieben werden:

$$0 \leq x \leq 3, \quad (x - 1)^2 \leq y \leq x + 1.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \int_{(x-1)^2}^{x+1} dy \, dx \\ &= \int_0^3 y \Big|_{(x-1)^2}^{x+1} dx \\ &= \int_0^3 -x^2 + 3x \, dx \\ &= -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

- (b) Drehen Sie die Integrationsreihenfolge des Flächenintegrals um.

Lösung:

In obigem Flächenintegral wird zuerst nach y integriert (hier dürfen die Integrationsgrenzen noch von x abhängen, weil nach x erst später integriert wird) und anschließend nach x (hier dürfen die Grenzen nicht von y abhängen, weil nach y bereits integriert wurde).

Nun wollen wir zuerst nach x integrieren und dann nach y , d.h. die Grenzen für y müssen konstant sein. Dazu wird die Fläche in zwei Teilflächen aufgeteilt: Wenn $0 \leq y \leq 1$ gilt, dann wird x nur von $y \geq (x-1)^2$ begrenzt und wenn $1 \leq y \leq 4$ gilt, dann wird x von $y \leq x+1$ und von $y \geq (x-1)^2$ begrenzt. Also erhalten wir

$$0 \leq y \leq 1, \quad -\sqrt{y} + 1 \leq x \leq \sqrt{y} + 1$$

und

$$1 \leq y \leq 4, \quad y - 1 \leq x \leq \sqrt{y} + 1.$$

Es gilt:

$$A = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}+1}^{\sqrt{y}+1} dx dy + \int_1^4 \int_{y-1}^{\sqrt{y}+1} dx dy.$$

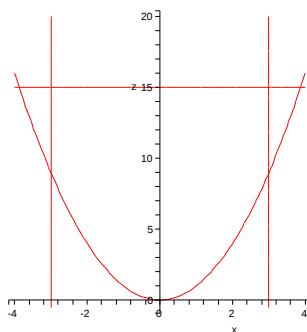
2. Gegeben sei der Körper

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 \leq 9, z \leq 15\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers (Transformation auf Zylinderkoordinaten).

Lösung: Wieder fertigen wir zuerst eine Skizze an. Die erste Ungleichung beschreibt ein Rotationsparaboloid, die zweite Ungleichung einen Zylinder und die dritte Ungleichung eine Ebene.

In diesem Fall verwenden wir den Aufriss, d.h. die Darstellung in der $x-z$ -Ebene:



Der Schnittpunkt der beiden ersten Ungleichungen liegt bei $z = 9$. Da wir aber an dem Körper mit Höhe $z = 15$ interessiert sind, trennen wir K in zwei Teilkörper K_1 mit $0 \leq z \leq 9$ und in K_2 mit $9 \leq z \leq 15$.

Nun verwenden wir Zylinderkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

Für K_1 gilt $0 \leq z \leq 9$, $0 \leq r^2 \leq z$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und daher

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^9 \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, dz \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^9 \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{z}} \, dz \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^9 \frac{z}{2} \, dz \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{z^2}{4} \Big|_0^9 \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} \, d\varphi \\
 &= \frac{81}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{81}{2} \pi
 \end{aligned}$$

Der zweite Teilkörper ist ein Zylinder der Höhe 6 mit Radius 3, deshalb gilt $V_2 = 6(3^2)\pi = 54\pi$ (unter Verwendung der Volumsformel für Zylinder). Das Ergebnis bekommt man natürlich auch, wenn man das Volumsintegral mit folgenden Grenzen aufstellt:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 9 \leq z \leq 15, \quad 0 \leq r \leq 3$$

und

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_9^{15} \int_0^3 r \, dr \, dz \, d\varphi.$$

Also hat der gesamte Körper das Volumen $V = V_1 + V_2 = \frac{189}{2}\pi$.

Alternativ hätte man folgende Überlegung anstellen können: Der Körper K ist ein Rotationskörper. Der Teilkörper K_1 entsteht, indem man $z = x^2$ in den Grenzen $0 \leq z \leq 9$ um die z -Achse rotieren lässt. D.h. der Rotationskörper wird durch die Rotation von $x = f(z) = \sqrt{z}$ um die z -Achse bestimmt. Daher folgt für das Volumen

$$V_1 = \pi \int_0^9 f(z)^2 \, dz = \pi \int_0^9 z \, dz = \frac{81}{2} \pi.$$