Tutorium Mathematik I M WM

4.5.2007
Lösungen

1. Betrachten Sie folgende zwei vektorwertigen Abbildungen
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_2^2)$$
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad h(y_1, y_2, y_3) = y_1 + \sin(y_2 + y_3)$$

   Berechnen Sie

   (a) die Jakobimatrizen von g und h,
   Lösung: Die Jakobimatrix enthält zeilenweise die Gradienten der Komponentenfunktionen. Daher folgt
$$J_g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \qquad J_h(\vec{y}) = (1, \cos(y_2 + y_3), \cos(y_2 + y_3)) = \mathrm{grad}_h(\vec{y})^T$$

   (b) die Jakobimatrix von $h \circ g$ mit der Kettenregel,
   Lösung:
   Nach der Kettenregel gilt $J_{h\circ g}(\vec{x}) = J_h(g(\vec{x}))J_g(\vec{x})$ also in unserem Fall
$$\begin{aligned} J_h(g(\vec{x})) &= J_h(x_1, x_1 + x_2, x_2^2) = (1, \cos(x_1 + x_2 + x_2^2), \cos(x_1 + x_2 + x_2^2)) \\ J_{h\circ g}(x) &= (1, \cos(x_1 + x_2 + x_2^2), \cos(x_1 + x_2 + x_2^2)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix} \\ &= (1 + \cos(x_1 + x_2 + x_2^2), \cos(x_1 + x_2 + x_2^2) + 2x_2 \cos(x_1 + x_2 + x_2^2)) \end{aligned}$$

2. Gegeben sei das Skalarfeld $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit
$$U(x, y, z) = ze^{x^2 y}$$

   (a) Bestimmen Sie div(grad U).
   Lösung
   Wir bestimmen zunächst grad(U):
$$\mathrm{grad}(U) = \begin{pmatrix} U_x(x, y, z) \\ U_y(x, y, z) \\ U_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ze^{x^2 y} 2xy \\ ze^{x^2 y} x^2 \\ e^{x^2 y} \end{pmatrix}$$
   Es gilt: $\mathrm{div}((a, b, c)^T) = a_x + b_y + c_z$, wobei in unserem Fall $(a, b, c)^T = \mathrm{grad}(U)$ und somit $a = U_x(x, y, z)$, $b = U_y(x, y, z)$ und $c = U_z(x, y, z)$ zu wählten ist. Somit folgt $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(U)) = U_{xx}(x, y, z) + U_{yy}(x, y, z) + U_{zz}(x, y, z)$.
$$\begin{aligned} U_{xx}(x, y, z) &= 2yze^{x^2 y} + 2xyze^{x^2 y} 2xy = e^{x^2 y}(2yz + 4x^2 y^2 z) \\ U_{yy}(x, y, z) &= x^4 ze^{x^2 y} \\ U_{zz}(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(U)) = e^{x^2y}(2yz + 4x^2y^2z + x^4z)$$

(b) Bestimmen Sie rot(grad U).

Lösung:

Die Rotation ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_y - b_z \\ a_z - c_x \\ b_x - a_y \end{pmatrix}$$

In unserem Fall ist $a = U_x(x,y,z)$, $b = U_y(x,y,z)$ und $c = U_z(x,y,z)$. Also gilt

$$\begin{aligned} c_y - b_z &= (U_z)_y(x,y,z) - (U_y)_z(x,y,z) = U_{zy}(x,y,z) - U_{yz}(x,y,z) \\ a_z - c_x &= U_{xz}(x,y,z) - U_{zx}(x,y,z) \\ b_x - a_y &= U_{yx}(x,y,z) - U_{xy}(x,y,z) \end{aligned}$$

Da die Funktion U stetig partiell differenzierbar ist, folgt aus dem Satz von Schwarz, dass alle Koeffizienten von rot(grad(U)) gleich 0 sind.

3. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Rotationsparaboloids (d.h. $f(x) = c\sqrt{x}$ mit $c > 0$ rotiert um die x-Achse) der Länge h.

Lösung:

Das Rotationsparaboloid der Länge h ergibt sich durch Rotation der Funktion $f(x)$ um die x-Achse. Der Körper hat die Länge h wenn $f(x)$ für $0 \leq x \leq h$ um die x-Achse rotiert.

Nach der Formel für das Volumen eines Rotationskörpers ergibt sich

$$V = \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h c^2 x dx = \pi \frac{c^2x^2}{2}\Big|_0^h = \pi \frac{(ch)^2}{2}.$$

Weiters bestimmt man die Oberfläche

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^h c\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{c}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^h c\sqrt{x + \frac{c^2}{4}}dx \\ &= 2\pi c \frac{2\left(x + \frac{c^2}{4}\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^h \\ &= \frac{4c\pi}{3}\left(\left(h + \frac{c^2}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{c^2}{4}\right)^{3/2}\right). \end{aligned}$$