

Tutorium Mathematik I M WM

27.4.2007

Lösungen

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f im Einheitskreis.

Lösung:

Die Nebenbedingung des Optimierungsproblem lautet $x^2 + y^2 \leq 1$. Wir werden zuerst Extrema ohne Nebenbedingung suchen und anschließend den Rand des Einheitskreises untersuchen:

Um Extrema von f zu finden, werden die Nullstellen des Gradient bestimmt:

$$\text{grad}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ -x + 2y \end{pmatrix} = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 2y$. Setzt man das in die erste Gleichung ein, so erhält man $4y - y - 1 = 3y - 1 = 0$ und daher $y_1 = \frac{1}{3}$ und $x_1 = \frac{2}{3}$. Wir haben nur einen potentiellen Extremalpunkt $P_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ gefunden. Nun muss man beachten, ob der gefundene Punkt auch im geforderten Bereich (also hier im Einheitskreis) liegt. Da dies der Fall ist, nehmen wir P_1 mit $f(P_1) = -\frac{1}{3}$ als kritischen Punkt in unsere weiteren Überlegungen auf. (Beachten Sie: Wenn aus der Optimierung ohne Nebenbedingung kritische Punkte hervorgehen, die nicht im gesuchten Bereich liegen, werden diese nicht weiter betrachtet!)

Nun sind wir noch an den Extremalstellen am Rand interessiert. Wir müssen also die Extrema von f unter $x^2 + y^2 = 1$ bestimmen. Dazu stellt man die Lagrangefunktion auf

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - xy + y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und bestimmt den Gradient von L

$$\text{grad}L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 + 2\lambda x \\ -x + 2y + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gradient der Lagrangefunktion muss gleich dem Nullvektor sein. Um die Variable λ zu eliminieren, multiplizieren wir die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und subtrahieren die Gleichungen anschließend:

$$\begin{aligned} 2xy - y^2 - y + 2\lambda xy &= 0 \\ -x^2 + 2xy + 2\lambda xy &= 0 \end{aligned}$$

ergibt $x^2 = y^2 + y$. Nun kann man diese Gleichung in die dritte Gleichung einsetzen:

$$1 = x^2 + y^2 = y^2 + y + y^2 = 2y^2 + y.$$

Letzte Gleichung hat folgende Lösungen: $y_2 = \frac{1}{2}$ und $y_3 = -1$. Weil wir fordern, dass die gesuchten Punkte am Rand der Einheitskugel liegen müssen, erhalten wir daher folgende Punkte $P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $P_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $P_4 = (0, -1)$ mit zugehörigen Funktionswerten $f(P_2) = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(P_3) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$ und $f(P_4) = 1$.

Beachten Sie, dass wir mittlerweile vier kritische Punkte gesammelt haben, deren Funktionswerte nun verglichen werden. Demnach ist P_1 ein Minimum und P_3 ein Maximum.

2. Bestimmen und klassifizieren Sie die singulären Kurvenpunkte der impliziten Funktion

$$x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2 = 0$$

und bestimmen Sie sämtliche Extrema in y -Richtung.

Lösung:

Sei $g(x, y) = x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^2$. Sie singulären Kurvenpunkte erfüllen $g_x(x, y) = 0 = g_y(x, y)$ und müssen zudem auf der Kurve liegen.

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= 4x^3 - 12xy - 32x = 4x(x^2 - 3y - 8) \\ g_y(x, y) &= -6x^2 + 50y \end{aligned}$$

Aus der ersten Bedingung $g_x(x, y) = 0$ folgt entweder $x = 0$ oder $x^2 = 3y + 8$. Falls $x = 0$ gilt, dann folgt aus der zweiten Bedingung $y = 0$. Also merken wir uns den Punkt $P_1 = (0, 0)$. Falls $x^2 = 3y + 8$ gilt, dann folgt aus der zweiten Bedingung $y = \frac{3}{2}$. Also bekommen wir die Punkte $P_2 = (\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2})$ und $P_3 = (-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2})$. Es muss noch überprüft werden, ob die Punkte auf der Kurve liegen: Es gilt $g(P_1) = 0$, $g(P_2) = -100 = g(P_3)$ und daher liegt nur P_1 auf der Kurve. Somit ist $P_1 = (0, 0)$ einziger singulärer Kurvenpunkt. Der Typ wird durch die Diskriminante bestimmt:

$$\Delta = g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy}$$

$$\begin{aligned} g_{xx}(x, y) &= 12x^2 - 12y - 32 \\ g_{xy}(x, y) &= -12x \\ g_{yy}(x, y) &= 50 \end{aligned}$$

Da $\Delta(P_1) = 1600 > 0$ folgt daraus, dass $P_1 = (0, 0)$ ein Schnittpunkt ist.

Schließlich müssen noch die lokalen Extrema in y -Richtung bestimmt werden. Ein lokales Extremum kann nur vorliegen, wenn die Funktion in diesem Punkt nach y auflösbar ist, d.h. $g_y \neq 0$, die implizite Ableitung $\varphi'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$ gleich 0 ist und der Punkt auf der Kurve liegt.

Aus $g_x = 0$ folgt entweder $x = 0$ oder $x^2 = 3y + 8$. Damit der Punkt auf der Kurve liegt, setzt man in die Funktion g ein: $g(0, y) = 25y^2 = 0$ und wir bekommen $x = 0 = y$ als mögliches Extremum. Da aber $x = 0 = y$ dem Punkt P_1 entspricht, der bereits als Singularität erkannt wurde (dort gilt $g_y = 0$), ist die Funktion in diesem Punkt nicht nach y auflösbar. Daher ist P_1 kein lokales Extremum. Wir betrachten anschließend $x^2 = 3y + 8$. Setzt man diese Bedingung in $g(x, y) = 0$ ein, so erhält man $y^2 - 3y - 4 = 0$ und daher $y = 4$ oder $y = -1$. Rückeinsetzen in $x^2 = 3y + 8$ liefert folgende Punkte: $P_4 = (\sqrt{20}, 4)$, $P_4 = (-\sqrt{20}, 4)$, $P_4 = (\sqrt{5}, -1)$, $P_4 = (-\sqrt{5}, -1)$. Um herauszufinden, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, benötigt man die zweite Ableitung:

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{g_y^3} (g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2)$$

Da $\varphi''(P_1) = \varphi''(P_2) = -2 < 0$ handelt es sich bei P_1 und P_2 um lokale Maxima während $\varphi''(P_3) = \varphi''(P_4) = \frac{1}{2} > 0$ und daher P_3 und P_4 lokale Minima sind.