

Tutorium Mathematik I M WM

30.3.2007

Lösungen

1. Entwickeln Sie die folgende Funktion in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $(1, \pi)$ (bis zu Gliedern einschließlich 2. Ordnung):

$$f(x, y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$$

Lösung:

Da die Entwicklung bis zu Gliedern einschließlich zweiter Ordnung gefragt ist, müssen zunächst alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bestimmt werden.

Die Taylorformel zweiter Ordnung hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2. \end{aligned}$$

Für

$$f(x, y) := x^2 \sin \frac{xy}{2}$$

erhält man die folgenden partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} x^2 y \cos \frac{xy}{2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2} x^3 \cos \frac{xy}{2}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \sin \frac{xy}{2} + 2xy \cos \frac{xy}{2} - \frac{1}{4} x^2 y^2 \sin \frac{xy}{2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{3}{2} x^2 \cos \frac{xy}{2} - \frac{1}{4} x^3 y \sin \frac{xy}{2}$$

$$f_{yy} = -\frac{1}{4} x^4 \sin \frac{xy}{2}$$

Auswertung an der Stelle $x = x_0 = 1$ und $y = y_0 = \pi$ liefert $f(1, \pi) = 1$, $f_x(1, \pi) = 2$, $f_y(1, \pi) = 0$, $f_{xx}(1, \pi) = 2 - \frac{\pi^2}{4}$, $f_{xy}(1, \pi) = -\frac{\pi}{4}$ und $f_{yy}(1, \pi) = -\frac{1}{4}$.

Einsetzen in die obige Taylorformel liefert:

$$f(x, y) \approx 1 + 2(x - 1) + \left(1 - \frac{\pi^2}{8}\right)(x - 1)^2 - \frac{\pi}{4}(x - 1)(y - \pi) - \frac{1}{8}(y - \pi)^2.$$

2. Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x, y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f .

Lösung:

Um die lokalen Extrema von f zu bestimmen, berechnen wir alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Es ergibt sich

$$f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - 2y^2)$$

$$f_y(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} (2 - x^2 - 2y^2)$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} [2 - 6x^2 - 4y^2 - 4x^2 (1 - x^2 - 2y^2)]$$

$$f_{yy}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} [4 - 2x^2 - 12y^2 - 4y^2 (2 - x^2 - 2y^2)]$$

$$f_{xy}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} [-8xy - 4xy(1 - x^2 - 2y^2)].$$

Um die kritischen Punkte (=Kandidaten für lokale Extrema) zu ermitteln, müssen nun die ersten Ableitungen Null gesetzt werden:

$$f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - 2y^2) = 0$$

$$f_y(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} (2 - x^2 - 2y^2) = 0$$

Das sind jetzt 2 notwendige Bedingungen an (x, y) für das Vorliegen eines lokalen Extremums. Da $e^{-(x^2+y^2)}$ nie 0 sein kann und da ein Produkt von 2 Faktoren genau dann Null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren gleich Null ist, unterscheiden wir nun 4 Fälle:

- (i) $x = 0$ und $y = 0$: Dies liefert den kritischen Punkt $S_1(0, 0)$.
- (ii) $x = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$: Einsetzen von $x = 0$ in die zweite Bedingung $2 - x^2 - 2y^2 = 0$ liefert $2y^2 = 2$ und damit $y = \pm 1$. Dies führt auf die kritischen Punkte $S_2(0, 1)$ und $S_3(0, -1)$.
- (iii) $y = 0$ und $1 - x^2 - 2y^2 = 0$: Einsetzen von $y = 0$ in die zweite Bedingung $1 - x^2 - 2y^2 = 0$ liefert $x^2 = 1$ und damit $x = \pm 1$. Dies führt auf die kritischen Punkte $S_4(1, 0)$ und $S_5(-1, 0)$.
- (iv) $1 - x^2 - 2y^2 = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$: Dieses Gleichungssystem ist widersprüchlich und liefert somit keinen weiteren kritischen Punkt.

Es sind also insgesamt 5 kritische Punkte zu untersuchen. Dabei muss die Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

in diesen Punkten ausgewertet werden. Es ergibt sich

$$M_1 = H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_2 = H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix} = H_f(0, -1) = M_3$$

$$M_4 = H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix} = H_f(-1, 0) = M_5$$

Die Matrix M_1 ist positiv definit (positive Determinante und positives Element in der ersten Zeile und Spalte) und somit ergibt sich aus S_1 das **lokale Minimum** $(0,0,0)$.

Die Matrizen M_2 und M_3 sind negativ definit (positive Determinante und negatives Element in der ersten Zeile und Spalte) und somit ergeben sich aus S_2 und S_3 die **lokalen Maxima** $(0, 1, \frac{2}{e})$ und $(0, -1, \frac{2}{e})$.

Die Matrizen M_4 und M_5 sind indefinit (negative Determinante), somit resultieren daraus die **Sattelpunkte** $(1, 0, -\frac{1}{e})$ und $(-1, 0, -\frac{1}{e})$.