Tutorium Mathematik I M WM

23.3.2007
Lösungen

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2(xy)}{y} & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

(a) Gesucht sind $f_x(x,0)$ und $f_y(x,0)$.
<u>Lösung:</u>
Die zentrale Beobachtung für die Berechnung der partiellen Ableitung $f_x(x,0)$ ist, dass

$$f(x,0) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt, d.h. für $y = 0$ ist $f(x,y)$ eine konstante Funktion, nämlich die Null-Funktion. Es folgt unmittelbar, dass

$$f_x(x,0) = 0$$

da die Ableitung der Nullfunktion gleich 0 ist.

Zur Berechnung der partiellen Ableitung $f_y(x,0)$ verwenden wir die Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten.

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin^2(xy)}{y} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(xy)}{y^2}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist eine unbestimmte Form des Typs "$\frac{0}{0}$". Bevor wir die Regel von de l'Hospital anwenden, formen wir den Ausdruck ein wenig um, um uns Rechenarbeit zu ersparen. Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte gilt:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(xy)}{y^2} = \left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin xy}{y} \right)^2$$

Für die Berechnung des inneren Grenzwerts verwenden wir nun die Regel von de l'Hospital. Es ergibt sich

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{x\cos(xy)}{1} = x.$$

Daraus folgt durch Rückeinsetzen

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin^2(xy)}{y^2} = x^2$$

und somit

$$f_y(x,0) = x^2 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

(b) Existiert die partielle Ableitung f_{yx} im Punkt $(0,0)$? Berechnen Sie ggf. deren Wert.

Lösung:

Unter Verwendung der selben Grenzwertüberlegung wie in Aufgabenteil (a) ergibt sich

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Es gilt daher $f_{yx}(0,0) = 0$. Die partielle Ableitung $f_{yx}(x,y)$ existiert also im Punkt $(0,0)$.

(c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(\pi/2, 1)$ in Richtung von $v = (1,1)^t$.

Lösung:

Die Richtungsableitung $\delta_v f$ von f im Punkt $(\pi/2, 1)$ in Richtung von $\vec{v} = (1,1)^t$ errechnet sich als folgendes Skalarprodukt

$$\delta_v f(\pi/2, 1) = \left\langle \operatorname{grad} f(\pi/2, 1), \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle$$

(Der Vektor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{v}$ und hat Betrag 1.)

Wir müssen nun zuächst die partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ für $y \neq 0$ berechnen. Es gilt

$$f_x(x,y) = \frac{2y \sin(xy)\cos(xy)}{y} = 2\sin(xy)\cos(xy) = \sin(2xy)$$

$$f_y(x,y) = \frac{2xy\sin(xy)\cos(xy) - \sin^2(xy)}{y^2} = \sin(xy)\frac{2xy\cos(xy) - \sin(xy)}{y^2}$$

Einsetzen ergibt $f_x(\pi/2, 1) = \sin(\pi) = 0$ und $f_y(\pi/2, 1) = \sin(\pi/2)\left(\pi\cos(\pi/2) - \sin(\pi/2)\right) = -1$. Zusammenfassend hat man

$$\operatorname{grad} f(\pi/2, 1) = (0, -1)^t\,.$$

Weiters gilt $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ und somit $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$.

Durch Einsetzen erhält man

$$\delta_v f(\pi/2, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Sei $(x,y) \mapsto u(x,y)$ gegeben. Man stelle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

in Polarkoordinaten dar.

Lösung:

Die Funktion $u(x,y)$ wird durch $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ in $U(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ übergeführt. Das bedeutet umgekehrt: $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Um u_{xy} in Polarkoordinaten darzustellen, benötigen wir zuerst u_x. Aus der Vorlesung (siehe Skriptum) ist bekannt, dass

$$u_x = U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi$$

Das gilt, weil

$$u_x = U_r r_x + U_\varphi \varphi_x$$

und

$$r_x = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi$$
$$\varphi_x = \left(\arctan\frac{y}{x}\right)_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

Nun wendet man die Kettenregel auf u_x an. Es gilt:

$$u_{xy} = \left(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi\right)_r r_y + \left(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi\right)_\varphi \varphi_y$$

Zuerst bestimmen wir r_y und φ_y:

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi$$
$$\varphi_y = \frac{1}{x(1+\frac{y^2}{x^2})} = \frac{1}{r}\cos\varphi.$$

Und nun muss noch die Funktion $(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi)$ einmal nach r und einmal nach φ abgeleitet werden. Beachten Sie, dass $U = U(r, \varphi)$ also eine Funktion von r und φ ist!

$$\left(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi\right)_r = (U_{rr}\cos(\varphi)) - \left(-\frac{1}{r^2} U_\varphi \sin(\varphi) + \frac{1}{r} U_{\varphi r} \sin\varphi\right)$$

und

$$\left(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi\right)_\varphi = (U_{r\varphi}\cos\varphi - U_r \sin\varphi) - \frac{1}{r}(U_{\varphi\varphi}\sin\varphi + U_\varphi \cos\varphi)$$

Nun bauen wir alles zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= \left(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi\right)_r r_y + \left(U_r \cos\varphi - \frac{1}{r} U_\varphi \sin\varphi\right)_\varphi \varphi_y \\
&= \left((U_{rr}\cos(\varphi)) - \left(-\frac{1}{r^2} U_\varphi \sin(\varphi) + \frac{1}{r} U_{\varphi r}\sin\varphi\right)\right)\sin\varphi \\
&\quad + \left((U_{r\varphi}\cos\varphi - U_r \sin\varphi) - \frac{1}{r}(U_{\varphi\varphi}\sin\varphi + U_\varphi\cos\varphi)\right)\frac{1}{r}\cos\varphi \\
&= U_{rr}\cos\varphi\sin\varphi + U_{r\varphi}\frac{1}{r}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - U_{\varphi\varphi}\frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad + U_\varphi \frac{1}{r^2}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - U_r \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi
\end{aligned}$$