# Tutorium Mathematik I M WM

## 16.3.2007
## Lösungen

Gegeben sei folgende Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{4t}\cos(2t) \\ e^{4t}\sin(2t) \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \leq t \leq 2$.

   Lösung:

   Zur Bestimmung der Bogenlänge wird zuerst der Tangentenvektor bestimmt:

   $$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{4t}\cos(2t) - 2e^{4t}\sin(2t) \\ 4e^{4t}\sin(2t) + 2e^{4t}\cos(2t) \\ 4e^{4t} \end{pmatrix} = 2e^{4t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t)) \\ 2\sin(2t) + \cos(2t)) \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Dann wird die Länge des Tangentenvektors bestimmt:

   $$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \sqrt{4e^{8t}\left((2\cos(2t) - \sin(2t))^2 + (2\sin(2t) + \cos(2t))^2 + 4\right)} = \sqrt{36e^{8t}} = 6e^{4t}$$

   Schliesslich wird über die Länge des Tangentenvektors integriert, um die Bogenlänge zu ermitteln:

   $$B = \int_0^2 6e^{4t}dt = \frac{3}{2}e^{4t}\Big|_0^2 = \frac{3}{2}\left(e^8 - 1\right).$$

2. Führen Sie die Bogenlänge als Parameter ein, wobei die Bogenlänge im Punkt $(e^{4\pi}, 0, e^{4\pi})$ gleich 0 sei.

   Lösung:

   Der angegebene Punkt auf der Kurve entspricht dem Parameterwert $t_1 = \pi$. Nun bestimmen wir die Bogenlänge von $t_1$ bis zum Parameterwert $t$:

   $$s(t) = \int_\pi^t 6e^{4\tau}d\tau = \frac{3}{2}e^{4t}\Big|_\pi^t = \frac{3}{2}\left(e^{4t} - e^{4\pi}\right).$$

   Nun kennt man den Zusammenhang zwischen Parameter $t$ und der Bogenlänge $s(t)$ bis $t$. Man rechnet auf $t$ um und setzt dann in die Parameterdarstellung der Kurve ein:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{3}{2}\left(e^{4t} - e^{4\pi}\right) \\
\frac{2}{3}s + e^{4\pi} &= e^{4t} \\
\log(\frac{2}{3}s + e^{4\pi}) &= 4t \\
\frac{\log(\frac{2}{3}s + e^{4\pi})}{4} &= t
\end{aligned}
$$

$$
\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}s + e^{4\pi}\right)\cos\left(\frac{\log(\frac{2}{3}s+e^{4\pi})}{2}\right) \\ \left(\frac{2}{3}s + e^{4\pi}\right)\sin\left(\frac{\log(\frac{2}{3}s+e^{4\pi})}{2}\right) \\ \frac{2}{3}s + e^{4\pi} \end{pmatrix}.
$$

3. Berechnen Sie

   (a) das begleitende Dreibein,

   Lösung:

   Das begleitende Dreibein besteht aus normiertem Tangentenvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor. Den Tangentenvektor haben wir bereits bestimmt. Nach Normierung erhalten wir

$$
v_1(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ 2\sin(2t) + \cos(2t) \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

   Im Punkt $t_0 = 0$ ergibt das

$$
v_1(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

   Der Hauptnormalenvektor ergibt sich aus Ableiten des normierten Tangentenvektors (der Tangentenvektor muss normiert sein!) und anschliessendem Normieren:

$$
\dot{v_1}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4\sin(2t) - 2\cos(2t) \\ 4\cos(2t) - 2\sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) - \cos(2t) \\ 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

   Die Norm davon beträgt:

$$
\|\dot{\vec{v_1}}(t)\| = \sqrt{\frac{4}{9}\left[(-2\sin(2t) - \cos(2t))^2 + (2\cos(2t) - \sin(2t))^2\right]} = \frac{2}{3}\sqrt{5}.
$$

   Also lautet der Hauptnormalenvektor

$$
v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) - \cos(2t) \\ 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}
$$

und für $t_0 = 0$

$$v_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich wird der Binormalenvektor $v_3 = v_1 \times v_2$, der sich aus dem Kreuzprodukt von Tangenten- und Hauptnormalenvektor ergibt, berechnet.

$$v_3(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Achten Sie darauf, dass die Vektoren des begleitenden Dreibeins orthogonal aufeinander stehen müssen (Test auf Rechenfehler)!

(b) die Krümmung und Torsion,

<u>Lösung:</u>

Da in der Folge die ersten drei Ableitungen des Vektors immer wieder benötigt werden, bestimmen wir diese gleich jetzt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= 2e^{4t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ 2\sin(2t) + \cos(2t) \\ 2 \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{x}}(t) &= 4e^{4t} \begin{pmatrix} 3\cos(2t) - 4\sin(2t) \\ 3\sin(2t) + 4\cos(2t) \\ 4 \end{pmatrix} \\ \dddot{\vec{x}}(t) &= 8e^{4t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - 11\sin(2t) \\ 2\sin(2t) + 11\cos(2t) \\ 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $t_0 = 0$ gilt dann:

$$\dot{\vec{x}}(0) = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(0) = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \dddot{\vec{x}}(0) = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\vec{x}}(0)\| = 6, \quad \|\ddot{\vec{x}}(0)\| = 4\sqrt{41}$$

Die Krümmung ergibt sich aus der Formel

$$\kappa = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} \sqrt{\|\dot{\vec{x}}\|^2 \cdot \|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \left\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \right\rangle^2}.$$

Es muss nur mehr das Skalarprodukt bestimmt werden:

$$\left\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \right\rangle = \left\langle 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 144.$$

In die Formel eingesetzt, ergibt das

$$\kappa = \frac{\sqrt{5}}{9}.$$

Die Torsion genügt folgender Formel:

$$\tau = \frac{\left|\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}\right|}{\|\dot{\vec{x}}\|^2 \cdot \|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \left\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \right\rangle^2}.$$

Man bestimmt die Determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 2 & 16 & 88 \\ 4 & 12 & 64 \end{vmatrix} = 640$$

und setzt dann in die Formel ein:

$$\tau = \frac{2}{9}.$$

(c) die Schmiegebene

Lösung:

Der Parameterwert $t_0 = 0$ entspricht dem Punkt $x_0 = (1, 0, 1)^T$. Für die Schmiegebene im Punkt $x_0$ gilt

$$|x - x_0, v_1, v_2| = 0 = \left|x - x_0, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}\right|.$$

Daher muss folgende Determinante bestimmt werden:

$$\begin{vmatrix} x-1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y & \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ z-1 & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}(z-1)\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(z-1)\right)$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{5}}(4x + 2y - 5z + 1) = 0$$

Daraus folgt die Gleichung der Schmiegebene:

$$4x + 2y - 5z = -1.$$

für den Parameterwert $t_0 = 0$.