Tutorium Mathematik II M WM

29.6.2007

Lösungen

Lösen Sie folgende Systeme von Differentialgleichungen der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + b$ mit

1.
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 0 \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Eigenwerte und -vektoren der Matrix A lauten: EW 5 mit Eigenvektor $(-1,-2,1)^T$ und EW -3 mit Eigenvektoren $(-2,1,0)^T$ und $(3,0,1)^T$.

Lösung:

Die allgemeine Lösung des Systems ergibt sich aus allgemeiner homogener und partikulärer (d.h. spezieller) inhomogener Lösung. Daher bestimmen wir zuerst die allgemeine Lösung des homogenen Systems. Man beachte, dass der Eigenwert 5 offenbar geometrische und algebraische Vielfachheit 1 hat und der Eigenwert -3 geometrische und algebraische Vielfachheit 2. Somit gibt es insgesamt drei linear unabhängige Eigenvektoren. Ein Fundamentalsystem des homogenen Systems sieht daher wie folgt aus:

$$e^{5t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es bleibt noch eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu finden. Wir werden hier zwei Möglichkeiten aufzeigen, wie man eine partikuläre inhomogene Lösung findet.

Zuerst wenden wir die Ansatzmethode an: Wenn man aus der Störfunktion bereits ablesen kann, wie eine partikuläre inhomogene Lösung aussehen könnte, dann kann man einen geeigneten Ansatz wählen. Da die Störfunktion aus Vielfachen von e^{4t} besteht, versuchen wir folgenden Ansatz

$$\vec{x}^*(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ x_3^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 e^{4t} \\ D_2 e^{4t} \\ D_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

wobei die Konstanten D_1, D_2, D_3 so zu wählen sind, dass $\vec{x}^*$ eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems ist. Wir setzen den Ansatz daher in das System ein und erhalten:

$$e^{4t}\begin{pmatrix} 4D_1 \\ 4D_2 \\ 4D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} e^{4t}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} + e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man durch e^{4t} dividieren. Es bleibt ein System von linearen Gleichungen übrig. Wir bringen den Ausdruck $A(D_1, D_2, D_3)^T$ auf die andere Seite und erhalten

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & |1 \\ -2 & 3 & 6 & |0 \\ 1 & 2 & 4 & |2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & |1 \\ 0 & 7 & 21 & |1 \\ 0 & 7 & 14 & |4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & |1 \\ 0 & 7 & 21 & |1 \\ 0 & 0 & 7 & |-3 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $D_3 = -\frac{3}{7}$, $D_2 = \frac{10}{7}$, $D_1 = \frac{6}{7}$. Daher lautet die partikuläre inhomogene Lösung

$$\vec{x}^*(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ x_3^*(t) \end{pmatrix} = \frac{e^{4t}}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet daher $\vec{x}_h(t) + \vec{x}^*(t)$, also

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{4t}}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir wollen hier noch eine zweite Möglichkeit aufzeigen, wie man das System lösen kann. Diese Methode wird man etwa dann verwenden, wenn man keinen geeigneten Ansatz für die partikuläre inhomogene Lösung findet.

Wir schreiben zuerst die Eigenvektoren spaltenweise in eine Matrix T

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und setzen dann $\vec{x}(t) = T\vec{z}(t)$. Dann gilt $\dot{\vec{x}}(t) = T\dot{\vec{z}}(t)$ und schließlich $T\dot{\vec{z}} = AT\vec{z} + b$. Nun multiplizieren wir T^{-1} von links auf die Gleichung (die Spalten von T sind linear unabhängig, daher existiert die inverse Matrix). Beachten Sie, dass $T^{-1}AT = D$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge genau die Eigenwerte (in der Reihenfolge, in der die Eigenvektoren in T eingetragen wurden) sind. Wir bekommen

$$T^{-1}T\dot{\vec{z}} = T^{-1}AT\vec{z} + T^{-1}b \iff \dot{\vec{z}} = D\vec{z} + T^{-1}b$$

Nun wollen wir das neue System in z lösen. Hier haben wir den Vorteil, dass die Matrix D eine Diagonalmatrix ist und somit zeilenweise Differentialgleichungen erster Ordner zu lösen sind. Wir berechnen zuerst

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

und bekommen dann

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile bekommen wir $\dot{z}_1(t) = 5z_1(t)+e^{4t}\frac{5}{8}$. Durch Trennung der Veränderlichen bekommt man für die homogene Gleichung die Lösung $z_{1,h}(t) = C_1e^{5t}$. Anschließend wendet man die Variation der Konstanten an, um als partikuläre Lösung $z_1^*(t) = -\frac{5}{8}e^{4t}$ zu erhalten. Also lautet die allgemeine Lösung $z_1(t) = C_1e^{5t} - \frac{5}{8}e^{4t}$.

Analog geht man bei der zweiten und dritten Zeile vor und bekommt $z_2(t) = C_2e^{-3t} + \frac{5}{28}e^{4t}$ und $z_3(t) = C_3e^{-3t} + \frac{11}{56}e^{4t}$. Die allgemeine Lösung des Systems in Vektorschreibweise lautet daher

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{5t} - \frac{5}{8}e^{4t} \\ C_2e^{-3t} + \frac{5}{28}e^{4t} \\ C_3e^{-3t} + \frac{11}{56}e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Schließlich wird mit $\vec{x} = T\vec{z}$ rücktransfomiert und man bekommt wieder die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems.

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Es handelt sich hierbei um ein homogenes, lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Ziel ist es, ein Fundamentalsystem zu finden. Dazu bestimmen wir die Eigenwerte und -vektoren der Matrix A. Das charakteristische Polynom lautet $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, also hier

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 25 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 10) = 0.$$

Eine Nullstelle des Polynoms ist $\lambda_1 = 5$. Die weiteren erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung. Man erhält $\lambda_2 = 1 + 3i$ und $\lambda_3 = 1 - 3i$, d.h. es gibt zwei komplexe Nullstellen (die konjugiert zueinander sind). Nun ermitteln wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten:

Für $\lambda_1 = 5$ lösen wir

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 3 & 0 \\ -3 & 1-5 & 0 \\ 0 & 25 & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Wir erhalten als allgemeine Lösung $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 1 + 3i$ lösten wir

$$0 = \begin{pmatrix} 1-(1+3i) & 3 & 0 \\ -3 & 1-(1+3i) & 0 \\ 0 & 25 & 5-(1+3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 25 & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 4-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Setzen wir $x_1 = s$ dann liefert die erste Gleichung $x_2 = si$ und aus der dritten Gleichung bekommt man $25x_2 + (4-3i)x_3 = 0 = 25si + (4-3i)x_3$. Nun wird mit $(4+3i)$ erweitert: Man bekommt $0 = 25s(4+3i)i + (16+9)x_3$ daraus folgt $0 = 25(4i-3) + 25x_3$ und daher $x_3 = 3 - 4i$. Also lautet der Eigenvektor $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3-4i \end{pmatrix}$.

Da $\lambda_3 = 1 - 3i$ konjugiert komplex zu λ_2 ist, sind auch die Eigenvektoren konjugiert komplex und wir bekommen sofort $\vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 3+4i \end{pmatrix}$.

Somit lautet ein Fundamentalsystem

$$e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3-4i \end{pmatrix} \text{ und } e^{(1-3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 3+4i \end{pmatrix}.$$

Dieses Fundamentalsystem ist aber noch komplex obwohl die Matrix A reell ist. Man bekommt aber ein reelles Fundamentalsystem, indem man den Realteil und Immaginärteil trennt.

$$\begin{aligned} e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3-4i \end{pmatrix} &= e^t e^{3it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3-4i \end{pmatrix} \\ &= e^t (\cos(3t) + i\sin(3t)) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3-4i \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos(3t) + i\sin(3t) \\ i\cos(3t) - \sin(3t) \\ (3\cos(3t) + 4\sin(3t)) + i(-4\cos(3t) + 3\sin(3t)) \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\sin(3t) \\ 3\cos(3t) + 4\sin(3t)) \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ \cos(3t) \\ -4\cos(3t) + 3\sin(3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Real- und Immaginärteil sind linear unabhängig und bilden somit folgendes reelle Fundamentalsystem

$$e^{5t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad e^{t}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\-\sin(3t)\\3\cos(3t)+4\sin(3t))\end{pmatrix} \text{ und } e^{t}\begin{pmatrix}\sin(3t)\\\cos(3t)\\-4\cos(3t)+3\sin(3t)\end{pmatrix}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung des (homogenen) Systems

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}\cos(3t)\\-\sin(3t)\\3\cos(3t)+4\sin(3t))\end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix}\sin(3t)\\\cos(3t)\\-4\cos(3t)+3\sin(3t)\end{pmatrix}.$$