Tutorium Mathematik II M WM

22.6.2007

Lösungen

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = \frac{\ln(x) + 1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$y(1) = -3/4 \ \text{ und } \ y'(1) = 1/4.$$

<u>Lösung:</u>
Die Differentialgleichung

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = \frac{\ln(x) + 1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x}$$

ist eine Euler-Differentialgleichung. Wir verwenden die Substitution $x = e^t$. Mit $y(x) = v(t)$, $y'(x) = \frac{\dot{v}}{x}$ und $y''(x) = \frac{\ddot{v}-\dot{v}}{x^2}$ geht die obige Differentialgleichung in eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffzienten in v über. In diesem Beispiel ergibt sich auf diesem Weg:

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = x^2\frac{\ddot{v} - \dot{v}}{x^2} + 6x\frac{\dot{v}}{x} + 6v = \ddot{v} + 5\dot{v} + 6v.$$

Da v als Funktion von t betrachtet wird und nicht als Funktion von x, muss nun im nächsten Schritt auch die rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung transformiert werden. Da $x = e^t$ gesetzt wurde, gilt $\ln x = t$. Somit gilt

$$\frac{\ln(x) + 1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{t+1}{e^{2t}} + \frac{t}{e^t} = (t+1)e^{-2t} + te^{-t}\,.$$

Es gilt daher die folgende inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu lösen:

$$\ddot{v} + 5\dot{v} + 6v = (t+1)e^{-2t} + te^{-t}\,.$$

Zunächst lösen wir die homogene Gleichung. Zu diesem Zweck stellen wir das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ auf und bestimmen dessen Nullstellen. Es ergibt sich $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$. Als Nullstellen erhält man $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung in v lautet somit:

$$v_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}.$$

Als nächstes bestimmen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Zur vereinfachten Berechnung betrachten wir die beiden Störterme getrennt.
Für den ersten Störterm $(t+1)e^{-2t}$ ist der Ansatz

$$v_p^1(t) = t(A_1t + A_0)e^{-2t} = (A_1t^2 + A_0t)e^{-2t}$$

zu wählen (beachte: $\mu(-2) = 1$, da -2 einfache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist; $(t+1)$ ist ein Polynom vom Grad 1). Differenzieren liefert:

$$v_p^{1\prime}(t) = (-2A_1t^2 - 2A_0t + 2A_1t + A_0)e^{-2t}$$

und

$$\begin{aligned} v_p^{1\prime\prime}(t) &= (4A_1t^2 + 4A_0t - 4A_1t - 2A_0 - 4A_1t - 2A_0 + 2A_1)e^{-2t} \\ &= 4A_1t^2 + (4A_0 - 8A_1)t + 2A_1 - 4A_0. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für v liefert:

$$\left[4A_1t^2 + (4A_0 - 8A_1)t + 2A_1 - 4A_0 + 5(-2A_1t^2 + (2A_1 - 2A_0)t + A_0) + 6(A_1t^2 + A_0t)\right] e^{-2t} \\ = (t+1)e^{-2t}$$

bzw. nach Vereinfachung

$$(2A_1t + 2A_1 + A_0)e^{-2t} = (t+1)e^{-2t}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $2A_1 = 1$ und $2A_1 + A_0 = 1$. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $A_1 = \frac{1}{2}$ und $A_0 = 0$. Somit folgt

$$v_p^1(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-2t}.$$

Für den zweiten Störterm te^{-t} ist der Ansatz

$$v_p^2(t) = (B_1t + B_0)e^{-t}$$

zu wählen (beachte: $\mu(-1) = 0$, da -1 keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist; t ist ein Polynom vom Grad 1). Differenzieren liefert:

$$v_p^{2\prime}(t) = (B_1 - B_0 - B_1t)e^{-t}$$

und

$$v_p^{2\prime\prime}(t) = (-B_1 + B_0 + B_1t - B_1)e^{-t} = (B_0 - 2B_1 + B_1t)e^{-t}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für v liefert:

$$\left[B_0 - 2B_1 + B_1t + 5(B_1 - B_0 - B_1t) + 6(B_1t + B_0)\right] e^{-t} = te^{-t}$$

bzw. nach Vereinfachung:

$$\left[2B_1t + 2B_0 + 3B_1\right] e^{-t} = te^{-t}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $2B_1 = 1$ und $2B_0 + 3B_1 = 0$. Daraus folgt $B_1 = \frac{1}{2}$ und $B_0 = -\frac{3}{4}$. Somit folgt

$$v_p^2(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) e^{-t}.$$

Zusammensetzen der beiden Teillösungen liefert die folgende allgemeine Lösung der Differentialgleichung in v:

$$v(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\right) e^{-t}.$$

Durch Rücktransformation vermittels $t = \ln x$ erhalten wir die allgemeine Lösung der gegebenen Eulergleichung. Es ergibt sich

$$y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-2}\ln^2 x + x^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4}\right).$$

Zur Bestimmung der Lösung des gegebenen Anfangswertproblems verwenden wir die gegebenen Anfangsbedingungen

$$y(1) = -\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad y'(1) = \frac{1}{4}$$

um die Konstanten c_1 und c_2 in der allgemeinen Lösung zu ermitteln. Es gilt

$$y'(x) = -2c_1x^{-3} - 3c_2x^{-4} - x^{-3}\ln^2 x + x^{-3}\ln x - \frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{3}{4}x^{-2}.$$

Einsetzen von $x = 1$ liefert die beiden Gleichungen $c_1 + c_2 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$ und $-2c_1 - 3c_2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$. Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $c_1 = -1$ und $c_2 = 1$.
Die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems lautet somit:

$$y(x) = x^{-3} + x^{-2}\left(-1 + \frac{1}{2}\ln^2 x\right) + x^{-1}\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4}\right).$$