Tutorium Mathematik II M WM

15.6.2007

Lösungen

Gesucht sind die Ansätze für eine partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}x^3 + \sin -2x$:

   Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Es gilt daher $\mu(-2) = 2$.

   Da der Störterm aus mehreren Summanden besteht und man diese getrennt behandeln kann, stellen wir zunächst den Ansatz für den ersten Summanden $e^{-2x}x^3$ auf. Laut Ansatztabelle ergibt sich $e^{-2x}x^{\mu(-2)}P_3(x) = e^{-2x}x^2P_3(x) = e^{-2x}x^2(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)$. Für den 2. Summanden ergibt sich $A_4 \sin -2x + A_5 \cos -2x$. In Summe somit

   $$y_p(x) = e^{-2x}(A_0x^2 + A_1x^3 + A_2x^4 + A_3x^5) + A_4 \sin -2x + A_5 \cos -2x.$$

   Eigentlich sind hier nur die Ansätze für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gefragt. Dennoch wird hier einmalig das gesamte Beispiel durchgerechnet, d.h. eine allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmt. Dazu muss man zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' + 4y = 0$ bestimmen. Da -2 zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, bilden e^{-2x} und xe^{-2x} ein Fundamentalsystem. Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

   $$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}.$$

   Anschließend muss mithilfe des oben bestimmten Ansatzes eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmt werden. Dazu wird der Ansatz $y_p(x)$ in die Differentialgleichung eingesetzt, um die unbekannten Parameter $A_0, \ldots, A_5$ zu bestimmen. Dazu benötigen wir die erste und zweite Ableitung von $y_p(x)$:

   $$\begin{aligned}
   y_p(x) &= e^{-2x}(A_0x^2 + A_1x^3 + A_2x^4 + A_3x^5) + A_4 \sin -2x + A_5 \cos(-2x) \\
   y_p'(x) &= e^{-2x}(2A_0x + (3A_1 - 2A_0)x^2 + (4A_2 - 2A_1)x^3 + (5A_3 - 2A_2)x^4 - 2A_3x^5) \\
   &\quad - 2A_4 \cos(-2x) + 2A_5 \sin(-2x) \\
   y_p''(x) &= e^{-2x}(2A_0 + (6A_1 - 8A_0)x + (12A_2 - 12A_1 + 4A_0)x^2 + (20A_3 - 16A_2 + 4A_1)x^3 \\
   &\quad + (4A_2 - 20A_3)x^4 + 4A_5x^5) - 4A_5 \cos(-2x) - 4A_4 \sin(-2x)
   \end{aligned}$$

   Setzt man nun die Funktion $y_p(x)$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man (nach Vereinfachen):

   $$e^{-2x}(2A_0 + 6A_1x + 12A_2x^2 + 20A_3x^3) - 8A_4 \cos(-2x) + 8A_5 \sin(-2x) = e^{-2x}x^3 + \sin(-2x).$$

   Nun vergleichen wir die Koeffizienten für $e^{-2x}x^k$ für $k = 0, \ldots, 5$ und anschließend die Koeffizienten für die trigonometrischen Funktionen. Wir erhalten etwa für $e^{-2x}x^0$ durch Koeffizientenvergleich $2A_0 = 0$, also $A_0 = 0$. Analog bekommt man dann $A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{20}$,

$A_4 = 0$ und schließlich $A_5 = \frac{1}{8}$. Somit haben wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten

$$y_p(x) = \frac{1}{20}e^{-2x}x^5 + \frac{1}{8}\cos(-2x).$$

Schließlich lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{20}e^{-2x}x^5 + \frac{1}{8}\cos(-2x).$$

2. $y'' + 4y = e^{2x} + x\cos 2x$

   Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$.

   Der Ansatz für den ersten Summanden lautet A_0e^{2x} (es gilt ja $\mu(2) = 0$). Der Ansatz für den zweiten Summanden lautet $(A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x)x^{\mu(2i)}P_1(x) = (A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x)x(A_3 + A_4x)$ (es gilt ja $\mu(2i) = 1$). In Summe somit

$$y_p(x) = A_0e^{2x} + (A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x)(A_3x + A_4x^2)$$

3. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 4x)e^{3x} + e^{2x} + e^{7x} + (x^3 - x^2)e^{9x} + xe^{4x}\sin 3x$

   Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Der Ansatz für den ersten Summanden $e^{3x}(x^2 + 4x)$ lautet $e^{3x}x^{\mu(3)}P_2(x) = e^{3x}x(A_0 + A_1x + A_2x^2) = e^{3x}(A_0x + A_1x^2 + A_2x^3)$.

   Für den zweiten Summanden e^{2x} ergibt sich der Ansatz $A_3x^{\mu(2)}e^{2x} = A_3xe^{2x}$.

   Für den dritten Summanden e^{7x} ergibt sich der Ansatz $A_4x^{\mu(7)}e^{7x} = A_4e^{7x}$.

   Für den vierten Summanden $(x^3 - x^2)e^{9x}$ ergibt sich der Ansatz $x^{\mu(9)}e^{9x}P_3(x) = e^{9x}(A_5 + A_6x + A_7x^2 + A_8x^3)$.

   Für den letzten Summanden $xe^{4x}\sin 3x$ ergibt sich der Ansatz $x^{\mu(4+3i)}e^{4x}(A_9 \sin 3x + A_{10} \cos 3x)P_1(x) = e^{4x}(A_9 \sin 3x + A_{10} \cos 3x)(A_{11}x + A_{12})$

   Der Gesamtansatz ergibt sich durch Summierung der 5 Teilansätze.

4. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}\sin x$

   Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Der Ansatz für den Störterm $e^{2x}\sin x$ lautet

$$y_p(x) = e^{2x}x^{\mu(2+i)}(A_0 \sin x + A_1 \cos x) = e^{2x}(A_0 \sin x + A_1 \cos x).$$

5. $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}x^2 \sin 2x$

   Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = -2 + 2i$ und $\lambda_2 = -2 - 2i$. Der Ansatz für den Störterm $e^{-2x}x^2 \sin 2x$ lautet somit

   $y_p(x) = e^{-2x}(A_0 \sin 2x + A_1 \cos 2x)x^{\mu(-2+2i)}P_2(x) = e^{-2x}(A_0 \sin 2x + A_1 \cos 2x)(A_2 + A_3x + A_4x^2)x$

   (es gilt ja $\mu(-2 + 2i) = 1$).

6. $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}x^2 \sin x$

   Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = -2 + 2i$ und $\lambda_2 = -2 - 2i$. Der Ansatz für den Störterm $e^{-2x}x^2 \sin x$ lautet somit

   $y_p(x) = e^{-2x}(A_0 \sin x + A_1 \cos x)x^{\mu(-2+i)}P_2(x) = e^{-2x}(A_0 \sin x + A_1 \cos x)(A_2 + A_3x + A_4x^2)$

   (es gilt ja $\mu(-2 + i) = 0$).