Tutorium Mathematik II M WM

8.6.2007
Lösungen

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

1. Riccati'sche Differentialgleichung:

$$y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x.$$

Lösung:
Um die Riccati-Dgl. auf eine Bernoulli-Dgl. zu transformieren, benötigt man eine partikuläre Lösung. Wir versuchen es mit folgendem Ansatz: $y_1(x) = ax + b$ (da die Differentialgleichung nur Polynome 1. Grades enthält). Es gilt:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= ax + b \\ y_1'(x) &= a \\ a &= (1-x)(ax+b)^2 + (2x-1)(ax+b) - x \end{aligned}$$

Obige Gleichung gilt für alle x (Koeffizientenvergleich!), wenn $a = 0$ und $b = 1$ gilt. Das heisst wir haben eine partikuläre Lösung $y_1(x) = 1$ gefunden. Nun wird wie folgt transformiert:

$$y(x) = y_1(x) + v(x) \iff y = 1 + v$$

Es gilt $y' = v'$ und in die Differentialgleichung eingesetzt und vereinfacht, erhalten wir

$$v' = (1-x)(1+v)^2 + (2x-1)(1+v) - x = v^2(1-x) + v.$$

Nun liegt eine Bernoulli-Dgl. mit $\alpha = 2$ vor. Also wird $z(x) = v^{1-\alpha} = \frac{1}{v}$ substituiert:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{z} \\ v' &= -\frac{1}{z^2}z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2}z' &= \frac{1}{z^2}(1-x) + \frac{1}{z} \\ -z' &= 1 - x + z \\ z' &= -z + x - 1 \end{aligned}$$

Nun liegt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vor. Zuerst betrachten wir die homogene Gleichung $z' = -z$. Die löst man durch Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{1}{z}\,dz = -\int dx \iff \ln z = -x + \tilde{C} \iff z = Ce^{-x}.$$

Nun kennen wir die allgemeine Lösung $z_{hom} = Ce^{-x}$ der homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Form $z_{allg} = z_{hom} + z_{part}$, wobei z_{part} eine partikuäre Lösung der inhomogenen Gleichung ist. z_{part} wird durch Variation der Konstanten berechnet, d.h. man betrachtet z_{hom} und sieht die Konstante C als Funktion von x. Man versucht also eine partikuläre Lösung der Form $C(x)e^{-x}$ zu finden:

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)e^{-x} \\ y' &= C'e^{-x} - Ce^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'e^{-x} - Ce^{-x} &= -Ce^{-x} + x - 1 \\ C' &= e^x(x-1) \\ C &= \int e^x(x-1)\,dx = e^x(x-2) + C_1 \end{aligned}$$

Das letzte Integral wurde durch partielle Integration gelöst. Wir haben nun eine Funktion $C(x) = e^x(x-2) + C_1$ gefunden, sodass $C(x)e^{-x}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Da wir nur eine beliebige partikuläre Lösung benötigen, können wir C_1 beliebig wählen, z.B. $C_1 = 0$. Also gilt $z_{part} = C(x)e^{-x} = e^x(x-2)e^{-x} = x - 2$.

$$z_{allg} = z_{hom} + z_{part} = Ce^{-x} + x - 2$$

Durch Rücksubsitution erhält man $v = \frac{1}{Ce^{-x}+x-2}$ und schliesslich

$$y = v + 1 = \frac{1}{Ce^{-x} + x - 2} + 1.$$

2. Euler'scher Multiplikator:

$$y^2 - 2x - 2 + 2yy' = 0.$$

Lösung:

Zuerst wird überprüft, ob die Differentialgleichung exakt ist. Sei $A = y^2 - 2x - 2$ und $B = 2y$, dann muss gelten $A_y = B_x$. Da $A_y = 2y$ und $B_x = 0$ ist die Differentialgleichung nicht exakt. Daher versuchen wir, einen Euler'schen Multiplikator μ zu finden, der die Differntialgleichung exakt macht.

Wennt $\frac{A_y - B_x}{A}$ eine Funktion in y oder $\frac{A_y - B_x}{B}$ eine Funktion in x ist, dann lässt sich ein Multiplikator bestimmen. Bei uns ist $\frac{A_y - B_x}{B} = \frac{2y-0}{2y} = 1$ eine Funktion, die nur von x abhängig ist (die Funktion ist sogar konstant). Der Multiplikator lässt sich dann wie folgt bestimmen

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{A_y - B_x}{B}\,dx\right) = \exp\left(\int 1dx\right) = e^x.$$

Nun wird $\mu(x)$ auf die Differentialgleichung multipliziert:

$$e^x(y^2 - 2x - 2) + e^x 2yy' = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist nun exakt, denn sei $\tilde{A} = e^x(y^2 - 2x - 2)$ und $\tilde{B} = e^x 2y$ dann gilt $\tilde{A}_y = e^x 2y = \tilde{B}_x$. Nun kann man die exakte Differentialgleichung lösen, denn man weiss, dass es eine Funktion $F(x, y)$ gibt, für die $F_x = \tilde{A}$ und $F_y = \tilde{B}$ gilt und $F(x, y) = C$ Lösung der Differentialgleichung ist.

$$\begin{aligned}
F &= \int F_y \, dy = \int \tilde{B} \, dy + \varphi(x) \\
&= \int e^x 2y \, dy + \varphi(x) = e^x y^2 + \varphi(x) \\
\tilde{A} &= F_x \\
e^x(y^2 - 2x - 2) &= e^x y^2 + \varphi'(x) \\
\varphi'(x) &= e^x(-2x - 2) = -2e^x(x + 1) \\
\varphi(x) &= -2 \int e^x(x + 1) \, dx = -2xe^x
\end{aligned}$$

Das letzte Integral wird durch partielle Integration gelöst. Alternativ hätte man auch $F = \int F_x \, dx = \int \tilde{A} \, dx + \varphi(y)$ setzen können und dann $F_y = \tilde{B}$ nutzen um $\varphi(y)$ zu bestimmen.

Wir erhalten somit

$$F(x, y) = e^x y^2 - 2xe^x = e^x(y^2 - 2x) = C$$

als Lösung der Differentialgleichung.

3. Spezielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}.$$

Lösung:

Da die Differentialgleichung von der Form $y'' = f(y, y')$ ist, wird mit $p(y) = y'$ substituiert. Beachten Sie, dass p eine Funktion von y ist. Es gilt:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p'p.$$

Also lautet die Dgl. $p'p = \frac{p^2}{y}$. Der Sinn dieser Substitution ist, eine Differentialgleichung 1. Ordnung zu bekommen, wobei p die gesuchte Funktion und y die Variable ist. Offenbar ist $p = 0$ Lösung dieser Dgl. Durch Rücksubstituieren bekommen wir dann $y' = 0$ und daraus folgt $y = C_1$.

Weitere Lösungen ergeben sich aus der Dgl. nach Division durch p: $p' = \frac{p}{y}$. Hier kann man die Veränderlichen trennen:

$$\int \frac{1}{p} \, dp = \int \frac{1}{y} \, dy \iff \ln(p) = \ln(y) + C_2 \iff p = Cy.$$

Rücksubsitutieren ergibt: $y' = Cy$. Also Lösen wir jetzt noch diese Dgl. 1. Ordnung:

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int C \, dx \iff \ln(y) = Cx + C_3 \iff y = e^{Cx + C_3} = e^{C_3} e^{Cx} = De^{Cx}.$$

Wir erhalten somit als Lösung $y(x) = De^{Cx}$.