Tutorium Mathematik I M WM

9.3.2007
Lösungen

1. Finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 2xy + x \qquad y(0) = 1.$$

Lösung:
Wir verwenden die Methode der Trennung der Veränderlichen, d.h.

$$\frac{dy}{dx} = y' = 2xy + x = x(2y+1)$$

und daher

$$\int \frac{1}{2y+1} dy = \int x dx.$$

Nun wird beidseitig integriert.

$$\int \frac{1}{2y+1} dy = \ln(2y+1)\frac{1}{2} + C_1 \quad \text{und} \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2$$

Kombiniert man die beiden Ergebnisse, so erhält man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\ln(2y+1) = x^2 + 2(C_2 - C_1) = x^2 + C.$$

Alternativ kann man die Lösung auch in der folgenden Form schreiben:

$$2y + 1 = e^{x^2+C} = e^{x^2} e^C = e^{x^2}\tilde{C}.$$

Beachten Sie, dass e^C wieder eine Konstante ergibt, die wir kurz mit $\tilde{C}$ bezeichnen.

Schliesslich setzt man den Anfangswert ein (wir verwenden die erste Darstellung der allgemeinen Lösung):

$$\ln(2 \cdot 1 + 1) = 0^2 + C \implies \ln(3) = C$$

Daher hat das Anfangswertproblem folgende Lösung:

$$\ln(2y+1) = x^2 + C = x^2 + \ln(3)$$

oder alternativ

$$2y + 1 = 3e^{x^2}.$$

2. Untersuchen Sie folgende uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$(a)\ \int\limits_{x=0}^{1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx \qquad (b)\ \int\limits_{x=1}^{2} \frac{x}{x-1}dx$$

$$(c)\ \int\limits_{x=0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}dx$$

Lösung:

ad (a)

Das uneigentliche Integral ist wie folgt definiert:

$$\int\limits_{x=0}^{1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} \int\limits_{x=a}^{1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$$

Wir schätzen wie folgt ab:

$$\left|\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{gilt für alle } x \in \mathbb{R}$$

und hoffen, dass es sich dabei um eine konvergente Majorante handelt. Daher wird folgendes Integral bestimmt:

$$\int\limits_{x=a}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

und somit

$$\int\limits_{x=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} 2 - 2\sqrt{a} = 2.$$

Also haben wir eine konvergente Majorante gefunden und folgern daraus, dass auch das ursprüngliche Integral konvergiert.

ad (b)

Das uneigentliche Integral ist wie folgt definiert:

$$\int\limits_{x=1}^{2} \frac{x}{x-1}dx = \lim_{a\to 1^+} \int\limits_{x=a}^{2} \frac{x}{x-1}dx.$$

Hier versuchen wir es mit der Abschätzung

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| \geq \frac{1}{x-1}.$$

Obige Aussage gilt für alle $x \geq 1$ und somit für das gesamte Integrationsintervall. Nun bestimmt man den Wert des Integrals der Minorante:

$$\int_{x=a}^{2} \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1)\Big|_{x=a}^{2} = \ln(1) - \ln(a-1) = -\ln(a-1)$$

und da

$$\int_{x=1}^{2} \frac{1}{x-1} dx = \lim_{a \to 1^+} -\ln(a-1) = \infty$$

folgt daraus, dass es sich um eine divergente Minorante handelt und das ursprüngliche Integral ebenfalls divergent ist.

ad (c)

Beachten Sie, dass die untere Grenze des Integrals eine Polstelle und die obere Grenze unbeschränkt ist. Daher muss das Integral aufgespalten werden.

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_{x=a}^{1} \frac{\ln(x)}{e^x} dx + \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{\ln(x)}{e^x} dx = I_1 + I_2$$

Zuerst behandelt wir das Integral I_1. Es wird vermutet, dass das Integral konvergent ist. Daher versucht man eine konvergente Majorante zu finden:

$$\left| \frac{\ln(x)}{e^x} \right| \leq |\ln(x)| = -\ln(x)$$

gilt für alle $0 \leq x \leq 1$.

$$\lim_{a \to 0^+} \int_{x=a}^{1} -\ln(x) dx = \lim_{a \to 0^+} -(x\ln(x) - x)\Big|_{x=a}^{1} = \lim_{a \to 0^+} 1 + a\ln(a) - a = \lim_{a \to 0^+} 1 + a\ln(a).$$

Da a gegen 0 und $\ln(a)$ gegen $-\infty$ konvergiert, wenden wir de l'Hopital an:

$$\lim_{a \to 0^+} a\ln(a) = \lim_{a \to 0^+} \frac{\ln(a)}{\frac{1}{a}} = \lim_{a \to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \to 0^+} -a = 0.$$

Daher konvergiert die Majorante und somit auch I_1.

Nun behandeln wir I_2. Die selbe Abschätzung wie oben kann nicht verwendet werden, denn man überzeugt sich leicht, dass obige Majorante divergent ist. Daher ist entweder I_2 divergent oder die obige Abschätzung ist zu grob. Wir versuchen eine feinere Abschätzung zu finden, die für alle $x \geq 0$ gilt:

$$e^x \geq x^2 \implies \left| \frac{\ln(x)}{e^x} \right| \leq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Versucht man zuerst mit der Abschätzung $e^x \geq x$ zu arbeiten, dann erhält man eine divergente Majorante. Aus einer divergenten Majorante lässt sich aber kein Rückschluss auf das ursprüngliche Integral schliessen. Daher haben wir es mit $e^x \geq x^2$ versucht.

Nun muss folgendes Integral (durch partielle Integration) bestimmt werden:

$$\int_{x=1}^{b} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{-\ln(x)}{x}\Big|_{x=1}^{b} + \int_{x=1}^{b} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-\ln(b)}{b} - \frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{b} = \frac{-\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1.$$

Nun muss der Grenzübergang für $b \to \infty$ durchgeführt werden: Offenbar konvergiert $\frac{1}{b}$ für $b \to \infty$ gegen 0.

$$\lim_{b\to\infty} \frac{-\ln(b)}{b} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} = 0.$$

Dieses Resultat wurde durch Anwendung der Regel von de l'Hopital erreicht. Also folgt daraus, dass

$$\int\limits_{x=1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = 1$$

und daher konvergent ist. Also ist auch I_2 konvergent.

Da I_1 und I_2 konvergent sind, folgt daraus, dass auch das ursprüngliche Integral konvergent ist.