Tutorium Mathematik I M WM

1. 12. 2006
Lösungen

1. Bestimmen Sie die Ableitungen von

$$f(x) = \tan\sqrt{2-\sin^2 x} \qquad\qquad g(x) = \sqrt[x]{x}.$$

Lösung:

ad $f(x)$:

Wir benötigen hier, dass $(\tan(y))' = \frac{1}{\cos^2 y}$ und $(\sin(y))' = \cos(y)$. Dann wird schrittweise die Kettenregel angewendet:

$$(f(x))' = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{2-\sin^2 x}\right)}\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sin^2 x}}(-2\sin x)\cos x\right).$$

ad $g(x)$:

Zuerst wenden wir die Exponential- und Logarithmusfunktion an, d.h.

$$\sqrt[x]{x} = e^{\ln(\sqrt[x]{x})} = e^{\ln\left(x^{1/x}\right)} = e^{\frac{1}{x}\ln x}.$$

Nun verwenden wir $(e^x)' = e^x$ und $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und erhalten

$$(g(x))' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\frac{1}{x}\right) = \sqrt[x]{x}\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right).$$

2. Berechnen Sie die Grenzwerte von

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{e^x-1} \qquad\qquad \lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}.$$

Lösung:

ad a)

Es handelt sich um eine unbestimmte Form der Art $\frac{0}{0}$. Wir wenden de l'Hopital an:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}}{e^x}=\alpha-\beta.$$

ad b)

Hier liegt die unbestimmte Form 1^∞ vor. Deshalb wird die Exponential- und Logarithmusfunktion angewendet. Es folgt

$$x^{1/(1-x)}=e^{\ln\left(x^{1/(1-x)}\right)}=e^{\frac{\ln x}{1-x}}.$$

Der Exponent ist nun von der Form $\frac{0}{0}$. Darauf wird de l'Hopital angewendet:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

Also folgt für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

3. Entwickeln Sie

$$f(x)=\ln(1-x+x^2)$$

in eine Taylorreihe um $x_0=0$ (bis zur Potenz 3. Grades).

Lösung:

Dazu benötigen wir zuerst die ersten drei Ableitungen der Funktion:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{-1+2x}{1-x+x^2}\\
f''(x)&=\frac{2(1-x+x^2)-(-1+2x)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}=\frac{1+2x-2x^2}{(1-x+x^2)^2}\\
f'''(x)&=\frac{(2-4x)(1-x+x^2)-(1+2x-2x^2)2(1-x+x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^4}
\end{aligned}$$

Nun benötigen wir die Funktionswerte an der Stelle $x_0=0$:

$$f(0)=0, f'(0)=-1, f''(0)=1, f'''(0)=4$$

Die allgemeine Taylorentwicklung hat die Form

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\mathcal{R}_{n+1}$$

wobei mit $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f gemeint ist und $\mathcal{R}_{n+1}$ das $(n+1)$-te Restglied bezeichnet. Wir setzen also in diese Formel ein:

$$f(x)=0+\frac{-1}{1!}(x-0)+\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{4}{3!}(x-0)^3+\mathcal{R}_4=-x+\frac{x^2}{2}+\frac{4x^3}{6}+\mathcal{R}_4.$$