Tutorium Mathematik I M WM

24.11.2006
Lösungen

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{8k^2-2}$,

   Lösung:

   Es gilt $\frac{k}{8k^2-2} > \frac{1}{8k}$ für alle $k \geq 1$. Aus der Divergenz von

   $$\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

   und dem Minorantenkriterium folgt, dass die gegebene Reihe divergiert.

   Alternativ kann man sich auch überlegen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert. Setzt man $b_n = \frac{k}{8k^2-2}$ dann gilt

   $$\lim_{k\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{8k^2-2}k = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{8k^2-2} = \frac{1}{8} > 0.$$

   Daher ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ divergent.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}}$,

   Lösung:

   Der dominierende Term ist 2^k. Deshalb schätzen wir ab:

   $$\frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}} < \frac{1}{2^k}.$$

   Aus dem Wurzelkriterium erhalten wir die Konvergenz von

   $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

   und die Anwendung des Majorantenkriteriums liefert, dass die gegebene Reihe konvergiert.

   Alternativ kann man sich auch überlegen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergiert. Setzt man $b_n = \frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}}$ dann gilt

   $$\lim_{k\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k+k^2+\sqrt{k}}2^k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{k^2}{2^k}+\frac{\sqrt{k}}{2^k}} = 1 < \infty.$$

   Daher ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$,

   Lösung:

   Aufgrund des Terms 2^k versuchen wir, das Wurzelkriterium anzuwenden:

   $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k^2}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[k]{k^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

   Somit konvergiert die Reihe.

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$,

   Lösung:

   Aufgrund des Terms $k!$ versuchen wir das Quotientenkriterium:

   $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{5^{k+1}k!}{(k+1)!5^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{5}{k+1}\right| = 0 < 1.$$

   Daher ist die Reihe konvergent.

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k(1 - \sqrt[k]{a})$, $0 < a \leq 1$.

   Nach dem Konvergenzkriterium von Leibnitz ist die Reihe konvergent, falls $|a_k|$ mit $a_k = 1 - \sqrt[k]{a}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Da $a \leq 1$ gilt, folgt daraus, dass $a_k \geq 0$ und somit $|a_k| = a_k$ für alle $k \geq 1$. Wir werden zuerst die Monotonie nachweisen, d.h. $a_k = 1 - \sqrt[k]{a} \geq 1 - \sqrt[k+1]{a} = a_{k+1}$ was gleichbedeutend mit $\sqrt[k]{a} \leq \sqrt[k+1]{a}$ ist bzw. (nach Potenzieren mit $k(k+1)$ - ändert Ungleichung nicht, da $a_k \geq 0$) äquivalent zu $a^{k+1} \leq a^k$ ist. Dies ist eine wahre Aussage, da $0 < a \leq 1$ gilt. Somit haben wir eine monoton fallende Folge. Nun müssen wir noch zeigen, dass a_k gegen 0 konvergiert. Da $\sqrt[k]{a}$ für jedes positive a gegen 1 konvergiert (siehe Skriptium) folgt daraus, dass a_k eine Nullfolge ist.

   Somit haben wir gezeigt, dass $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge ist und daher aufgrund des Leibnitz'schen Kriteriums die Reihe konvergent ist.